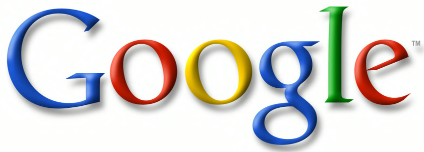



3 3433 06909389 0





([illegible])
OHT

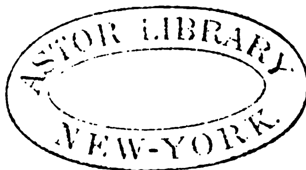
GRUNDRISS

der

höhern Analysis

von

Dr. H. Burhenne.

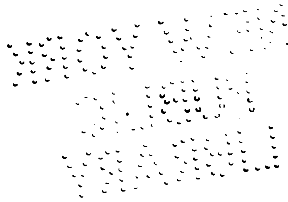


Cassel.

Verlag der J. C. Krieger'schen Buchhandlung.

1849.

Τὰ μαθήματα καθάρματα ψυχῆς.



Druck von H. Hotop in Cassel.

Vorrede.

In dem folgenden Abriss habe ich die Grundlehren der mathematischen Analysis, namentlich ihres höheren Theiles, zunächst für meine Schüler zusammengestellt. Dabei strebte ich zweierlei Zwecke mit einander zu verbinden, nämlich sowohl eine Uebersicht über den Organismus der Wissenschaft zu gewähren, als auch die für technische Anwendungen wichtigeren Lehren hervorzuheben.

Wegen der ersteren Rücksicht durften die Abschnitte über partielle Differentialgleichungen und Variationsrechnung nicht fehlen, wobei ich jedoch weniger in Specielles einzugehen, als vielmehr die wesentliche Bedeutung des Gegenstandes darzustellen für zweckmässig hielt. Was die Methode betrifft, so bin ich der Ueberzeugung gefolgt, dass man Solche, die zum ersten Male einen Ueberblick über das reiche Gebiet der Analysis gewinnen, und auch bald zu Anwendungen gelangen wollen, nicht durch allzu grossen Rigorismus in der Darstellung ermüden und aufhalten darf. Mögen dann später Diejenigen, welche die Theorie weiter verfolgen wollen, durch Privat-Studium sich mit den Werken eines Cauchy vertraut machen.

In Bezug auf die zweite Rücksicht schienen mir die meisten vorhandenen Lehrbücher der Analysis insofern mangelhaft zu sein, als sie bei den Anwendungen vorzugsweise die Geometrie im Auge haben, während doch die Mechanik gleiche Berücksichtigung verdient; auch wird gewöhnlich der für die Praxis so wichtige näherungsweise Gebrauch der Formeln, namentlich in den einfacheren Fällen, zu wenig beachtet. Ich habe deshalb gestrebt, ohne in specielle Beispiele, die man besser dem Spielraume des mündlichen Unterrichts überlässt, einzugehen, doch im Allgemeinen auf die mannigfaltigen für Anwendung fruchtbaren Resultate hinzuweisen, welche die Analysis zu erzielen vermag.

Uebrigens ist es nach meiner Ansicht für das Publicum vortheilhaft, wenn der Verfasser eines Lehrbuches, wie des vorliegenden, mehr daran denkt, das bereits Bewährte und allgemein Anerkannte zu sichten, als Proben eigener Productivität zu geben.

Cassel, im October 1849.

Der Verfasser.

INHALT.

Analysis.

Einleitung in die Analysis.

Entwickelung der Functionen in Reihen.

Differentialrechnung.

I. Einleitung.

II. Differenzirung der entwickelten Functionen.

III. Differenzirung der unentwickelten Functionen.

IV. Vertauschung und Wegschaffung von Veränderlichen in Differential-Ausdrücken.

V. Näherungsrechnungen.

VI. Rückblick auf die Theorie der Differentialrechnung.

VII. Taylorsche Reihe.

VIII. *Näherungs-Methoden.*

IX. *Fernere Anwendungen der Differentialrechnung.*

Integralrechnung.

I. *Einleitung.*

II. *Integration der Differentialformeln mit einer einzigen Veränderlichen (oder Quadraturen).*

III. *Von den bestimmten Integralen.*

Ueberblick über das System und die Anwendungen der Analysis.

§. 1.

Grundbegriff.

Ueberall kommen *Grössen* vor. Um die Vorstellungen der Grösse ins Gebiet des abstracten Denkens zu bringen, fassen wir sie mittelst der Zahl in Begriffe. *Zahl* ist die Grösse im Allgemeinen (in abstracto). Die *allgemeine* (abstracte) *Mathematik ist Zahlenlehre* (Wissenschaft des Calculs), welche die Gesetze der Zahlen betrachtet, ohne besondere Arten von Grössen zu unterscheiden. Von dieser allgemeinen Theorie ist sodann die *Anwendung* auf das Concrete zu machen. Wir beschäftigen uns im Folgenden mit der abstracten Grössenlehre, das ist mit der Zahlenlehre. Diese Wissenschaft entwickelt sich aus einem einzigen Grundbegriffe, nämlich aus dem einfachen Begriffe der Zahl.

§. 2.

Die Elemente.

Zum Grunde liegt die Reihe der *natürlichen* Zahlen, d. s. die absoluten ganzen Zahlen. Die Zahlen werden mit einander *verbunden*, d. h. es wird mit den Zahlen gerechnet, wodurch neue, *Zahlenverbindungen* oder *Zahlformen*, gebildet werden. Alle Verbindungen beruhen auf denen *zweier* Zahlen; diese *einfachen* Verbindungsarten sind die 7 Formen: *Summe* und *Differenz*, *Product* und *Quotient*, *Potenz* und *Wurzel* nebst *Logarithmus*, welche auf folgende Art bezeichnet werden:

Wenn $a + b = c$	Wenn $a . b = c$	Wenn $a^b = c$
so ist $\begin{cases} c - b = a \\ c - a = b \end{cases}$	so ist $\begin{cases} c : b = a \\ c : a = b \end{cases}$	so ist $\sqrt[b]{c} = a$ und $\log_a c = b$

Es werden nun die Gesetze der Zahlenverbindungen (Rechnungsarten) betrachtet. Diese Gesetze lassen sich im Grunde auf folgende 13 Formeln zurückführen:

$$a + b = b + a \qquad ab = ba \qquad (a^b)^c = (a^c)^b$$

$$(a + b) + c = (a + c) + b; \qquad (ab)\,c = (ac)\,b; \qquad \left(\sqrt[b]{a}\right)^b = a$$

$$(a - b) + b = a \qquad (a : b)\,b = a \qquad b^{\,{}^{b}\log a} = a$$

$$(a + b)\,c = ac + bc$$

$$a^{b+c} = a^b . a^c$$

$$a^{bc} = (a^b)^c$$

$$(ab)^c = a^c . b^c$$

Alle Formeln werden ursprünglich nur für natürliche Zahlen betrachtet, sodann aber allgemein aufgefasst. Durch die allgemeine Betrachtung der Formen: Differenz, Quotient, Wurzel und Logarithmus treten die gebrochenen, irrationalen, negativen und imaginären Zahlen auf.

Aus jenen Gleichungen lassen sich neue ableiten immerfort. Für die Praxis folge noch eine Zusammenstellung der nächst wichtigen Formeln:

$$a + b = b + a; \ (a + b) + c = (a + c) + b$$

$$(a + b) - b = a = (a - b) + b$$

$$(a - b) + c = (a + c) - b = a - (b - c)$$

$$(a - b) - c = (a - c) - b = a - (b + c)$$

$$(a + c) - (b + c) = a - b = (a - c) - (b - c)$$

u. s. w.

$$ab = ba; \ (ab)c = (ac)\,b$$

$$\frac{ab}{b} = a = \frac{a}{b} . b$$

$$\frac{a}{b} . c = \frac{ac}{b} = \frac{a}{b : c}$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a : c}{b} = \frac{a}{bc}$$

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$$

$$\frac{a}{b} . \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{a}{b} : \frac{d}{c}$$

u. s. w.

$$(a \pm b)\,c = ac \pm bc$$

$$\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}$$

u. s. w.

$$(\pm a) + (\pm b) = \pm (a + b)$$

$$(+a) + (-b) = +(a - b) = -(b - a)$$

$$-(\pm a) = +(\mp)\,a$$

$$(+a)(+b) = +ab = (-a)(-b)$$

$$(+a)(-b) = -ab$$

$$\frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$$

$$\frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{+b}$$

u. s. w.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$a^m : a^n = a^{m-n}$$
$$a^0 = 1;\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$
$$(ab)^n = a^n b^n$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$
$$(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$$
$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$
u. s. w.

$${}^{b}\log (b^a) = a = b^{({}^{b}\log a)}$$
$$\log (ab) = \log a + \log b$$
$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$
$$\log (a^b) = b \log a$$
$$\log \sqrt[b]{a} = \frac{\log a}{b}$$
$${}^{b}\log a = {}^{b}\log c \cdot {}^{c}\log a = \frac{1}{{}^{c}\log b}\, {}^{c}\log a$$
$$\frac{{}^{b}\log a}{{}^{c}\log a} = \frac{{}^{d}\log c}{{}^{d}\log b} = \frac{{}^{b}\log e}{{}^{c}\log e}$$
u. s. w.

Nachdem man alle Zahlen in allen Verbindungen betrachtet hat, sind die *Elemente* der Zahlenlehre durchlaufen. Diese Theorie der einfachen Rechnungsarten ist das *Fundament* der Mathematik.

Jede bestimmte Relation zwischen Grössen wird durch eine *Gleichung* ausgedrückt. Die Gleichungen werden *umgeformt* gemäss den Gesetzen der Rechnungsarten.

§. 3.

Uebergang zur Analysis.

Der *Fortschritt* im Systeme der Mathematik geschieht (wie auch in anderen Wissenschaften) dadurch, dass die Begriffe sich stufenweise *verallgemeinern* (abstracter werden). Eine Hauptstufe der Verallgemeinerung hebt an, indem alle unendlich vielen bestimmten Zahlen unter der *veränderlichen Zahl* zusammen begriffen werden. Durch diesen Begriff werden die Grössen gleichsam aus der Starrheit erlöst und in Fluss gebracht. Die Lehre von den veränderlichen Grössen heisst *Analysis*.

ANALYSIS.

Einleitung in die Analysis.

§. 4.

Grundbegriff der Analysis.

Die Analysis beschäftigt sich mit den veränderlichen Grössen. Wollte man nun blos absolut veränderliche Grössen für sich betrachten, so würden sich keine weiteren Untersuchungen darbieten. Aber es sind nun die variablen Grössen untereinander und mit den constanten zu verbinden, wodurch die sogenannten Functionen entstehen. Daher kann man die Analysis auch als Theorie der Functionen bezeichnen. Der Begriff einer Function ist der Grundbegriff der gesammten Analysis.

§. 5.

Von den veränderlichen Grössen im Allgemeinen.

Eine veränderliche Zahl ist entweder unabhängig veränderlich (veränderlich im engeren Sinne) oder abhängig veränderlich, d. h. Function einer oder mehrerer Variablen.

In bestimmten Fällen der Anwendung sind diejenigen Veränderlichen als unabhängig zu betrachten, deren Veränderung nicht der Veränderung einer anderen Grösse untergeordnet ist. Wenn man die Zeit als unabhängig Veränderliche betrachtet, so hat dies seinen Grund in dem Wesen dieser Grösse; nämlich die Zeit ist die einzige nothwendig unabhängige Veränderliche. So muss z. B. der Ablenkungswinkel ϑ eines Pendels als eine Function der seit dem Anfange der Bewegung verflossenen Zeit t betrachtet werden, aber es würde unnatürlich sein, hier t als Function von ϑ zu betrachten. (Wenn dagegen die Veränderliche t die absolute Dauer einer Erscheinung ausdrückte, so könnte sie die Rolle einer abhängigen veränderlichen Grösse spielen; z. B. die Schwingungsdauer t eines Pendels ist eine Function

des anfänglichen Ablenkungswinkels ϑ.) — In anderen Fällen beruht die Unabhängigkeit der veränderlichen Grössen nicht in der Natur der Grössen selbst, sondern in der Annahme. Z. B. die veränderlichen Coordinaten x, y, z, welche die Lage eines Punctes im Raume bestimmen, kann man als unabhängig betrachten, aber auch nichts hindert, sie als Functionen der Coordinaten u, v, w eines anderen Systemes zu betrachten, so dass hier die Unabhängigkeit der veränderlichen Grössen ihren Grund nicht in dem Wesen dieser Grössen hat, sondern in der willkürlichen Wahl als Coordinaten.

Wir betrachten zunächst eine Function y Einer Variablen x. Sieht man auf die Anzahl der auf x sich beziehenden Operationen, so sind die einfachsten Functionen solche, wo x nur mit Einer constanten Grösse a durch eine einfache Rechnungsart verbunden ist, nämlich:

$$a + x,\ a - x,\ ax,\ \frac{a}{x},\ x^a$$

$$a^x,\ \overset{a}{\log}\, x$$

Daran schliessen sich später noch die Kreisfunctionen

$$\sin x,\ \cos x$$

$$\text{arc}\sin x,\ \text{arc}\cos x$$

wegen ihrer Wichtigkeit an. Die fünf ersten dieser Functionen gehören zu den algebraischen, und die übrigen zu den transcendenten.

Aus dieser kleinen Anzahl fundamentaler Functionen sind die übrigen unzähligen zusammengesetzt.

Sieht man auf die Art der auf x sich beziehenden Operationen, so sind die ganzen rationalen Functionen von der einfachsten Form. (Complicirter sind die gebrochenen und irrationalen Functionen, und noch mehr die transcendenten.)

Noch mannigfaltiger sind die Functionen von zwei oder mehr Veränderlichen. In der Anwendung kommen Functionen von 1, 2, 3 auch 4 unabhängigen Variablen vor.

Hat man eine Gleichung zwischen zwei oder mehr Variablen, so kann man irgend eine als Function der übrigen betrachten, und die Gleichung ist nach dieser Einen Grösse aufgelöst oder nicht; daher unterscheidet man entwickelte und unentwickelte Functionen (oder explicite und implicite).

Jede Gleichung mit zwei veränderlichen Grössen kann als die Gleichung einer ebenen Curve, und jede Gleichung zwischen drei Veränderlichen als die Gleichung einer krummen Fläche betrachtet werden. Daher kommt die Anwendung der Functionen von zwei und drei Veränderlichen in der analytischen Geometrie. Functionen von

mehr als zwei Veränderlichen lassen sich nicht geometrisch construiren, aber in Mechanik und Physik kommen auch Functionen von 3, oder von 4 Veränderlichen vor.

In anderer Hinsicht erscheint die Analysis bei der Anwendung auf Geometrie unvollkommen. Nämlich man kann eine Linie oder eine Fläche in ihrer ganzen Ausdehnung, aber nicht begrenzte Stücke von Linien oder Flächen (auf einfache Weise) analytisch ausdrücken; auch kann man nicht die einen bestimmten körperlichen Raum ausfüllenden Puncte durch eine Gleichung charakterisiren. — Damit hängt Folgendes zusammen: Wenn in der Statik für ein System von Puncten Bedingungen (Widerstände) solcher Art vorkommen, dass die jeder möglichen Bewegung gerad entgegengesetzte nicht gleichfalls möglich ist, so kann man solche einseitige Bedingungen nicht durch eine Gleichung zwischen den Coordinaten der Puncte ausdrücken. Z. B. Ein Punct soll auf der einen Seite einer Fläche bleiben, so dass er nicht nach der einen Richtung der Normale, aber wohl nach der entgegengesetzten sich bewegen kann. Oder: Zwei Puncte sind durch einen Faden verbunden, so dass ihre Distanz nicht zunehmen, aber wohl abnehmen kann. U. s. w.

§. 6.

Grenzen der veränderlichen Grössen.

Eine Grössse, die ins Unendliche wächst, so dass sie grösser wird, als jede angebbare Zahl, heist unendlich gross (oder unendlich schlechthin), und wird durch ∞ bezeichnet. Eine Grösse, die unendlich abnimmt, so dass sie kleiner wird, als jede gegebene Grösse, heisst unendlich klein, das ist $\frac{1}{\infty}$. Es sind dies werdende Grössen, die Unendlich oder Null werden.

Eine Grösse kann immerfort zu- oder abnehmen, und dennoch an eine bestimmte endliche Grenze gebunden sein; z. B. $a - \frac{b}{x}$ nähert sich im Wachsen ohne Ende dem a, und $a + \frac{b}{x}$ nähert sich im Abnehmen ohne Ende dem a, wenn x immerfort wächst.

Wenn eine veränderliche Grösse z sich einer unveränderlichen Grösse a ohne Ende nähert, dergestalt, dass der Unterschied $a - z$ zwischen beiden unendlich klein wird, so heisst a die Grenze von z (z convergirt ohne Ende gegen a). Jede veränderliche Grösse, die Null zur Grenze hat, ist unendlich klein.

Die unendlich kleinen Grössen, welche in der Analysis vorkommen, sind unendlich kleine Aenderungen der veränderlichen Grössen.

§. 7.

Stetigkeit der Aenderung.

Eine Grösse ändert sich stetig (continuirlich) von einem Werthe zu einem andern, wenn sie dabei alle (unendlich vielen) Zwischenwerthe durchläuft. Die Differenz zwischen zwei nächst auf einander folgenden Werthen einer stetig veränderlichen Grösse ist unendlich klein. In der stetigen Reihe der Grösse sind $a - \varepsilon$ und $a + \varepsilon$ die Nachbarwerthe (nächst angrenzenden Werthe) von a, wo ε unendlich klein. Das Unendlichkleine ist der Nachbarwerth von Null.

Während in einer Function von x das x sich stetig ändert, ist auch die Function im Allgemeinen (d. h. wenn man von besonderen Ausnahmefällen absieht) stetig (continuirlich); nur für gewisse besondere Werthe von x kann eine Function unstetig (discontinuirlich) sein. Eine Function f(x) ist bei $x = \alpha$ continuirlich, wenn $f(\alpha - \varepsilon) - f(\alpha)$ und $f(\alpha + \varepsilon) - f(\alpha)$ unendlich klein sind, wo $f(\alpha - \varepsilon)$ und $f(\alpha + \varepsilon)$ die Nachbarwerthe von $f(\alpha)$, d. h. die beiden Werthe vorstellen, welche dem $f(\alpha)$ nächst voran gehen und nächst folgen. Findet dies nicht Statt, so ist die Function nicht continuirlich. Z. B. $\frac{1}{x}$ ist discontinuirlich bei $x = 0$, indem hier die Function aus $-\infty$ in $+\infty$ überspringt; daher, wenn in einem speciellen Falle der allgemeinen Rechnung Null im Nenner erscheint, so ist dies ein Ausnahmefall, den man besonders behandeln muss.

Es ist anzunehmen, dass jede veränderliche physische Grösse genau genommen sich stetig ändert, d. h. dass sie von einem endlichen Werthe nicht zu einem anderen endlichen Werthe übergehen kann, ohne während dieses Ueberganges alle zwischenliegenden Werthe anzunehmen, wie schon das bekannte Sprüchwort der alten Philosophen ausdrückt: Natura non facit saltus. Wenigstens kann eine messbare physische Grösse nicht Unterbrechungen der Stetigkeit erfahren, welche vom Durchgange durch einen unendlich grossen Werth herrühren. Wird eine physische Grösse durch eine mathematische Function ausgedrückt, bei welcher solche Unterbrechungen der Stetigkeit stattfinden, so muss man schliessen, dass die mathematische Function in der Nähe der Werthe, für welche die Unterbrechung der Stetigkeit stattfindet, das wahre Maass der physischen Grösse nicht mehr ausdrückt. So wird z. B. die gegenseitige Attractionskraft zwischen zwei ponderabeln Moleculen bekanntlich durch die Function $\frac{a}{x^2}$ ausgedrückt, wo a eine Constante und x die gegenseitige Entfernung der beiden Molecule bezeichnet. Da diese Function unendlich wird, wenn x verschwindet, so muss man, wenn die Molecule einander sehr nahe kommen, für diese Function eine andere substituiren.

§. 8.

Verschiedene Ordnungen des unendlich Kleinen.

Von zwei Zahlen m und n, sie mögen endlich oder unendlich klein sein, heisst n unendlich klein gegen m, und dann m unendlich gross gegen n, wenn der Quotient $\frac{n}{m}$ unendlich klein ist.

Man theilt daher die unendlich Kleinen in Ordnungen, und rechnet solche Unendlich-Kleine zu derselben Ordnung, deren Quotienten endliche Werthe haben. So entstehen höhere und niedere Ordnungen des unendlich Kleinen. Z. B. Wenn ε unendlich klein ist, und a, b, c, ... endliche Werthe haben, so sind die Potenzen $a\varepsilon$, $b\varepsilon^2$, $c\varepsilon^3$, ... unendlich Kleine der ersten, zweiten, dritten, ... Ordnung.

Die Potenzen eines sehr kleinen Bruches nehmen sehr schnell ab, so dass man bei einer Näherungsrechnung eine höhere Potenz gegen eine niedrigere vernachlässigen kann, wobei der Fehler desto kleiner wird, je kleiner der Bruch ist. Man kann die Basis immer so klein annehmen, dass der Fehler kleiner wird, als jede gegebene Grösse, das heisst mit anderen Worten: Von einer unendlich kleinen Grösse verschwinden die höheren Potenzen gegen die niederen. Genauer wollen wir dies im folgenden Paragraphen betrachten.

§. 9.

Grenzwerthe von Polynomen.

In jeder unendlichen Reihe von der Form

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots,$$

die nach steigenden Potenzen von x fortgeht, kann immer (vorausgesetzt, dass keiner der Coefficienten a, b, c, d, ... unendlich gross sei), x so klein genommen werden, dass das erste Glied a grösser wird, als die Summe aller übrigen; und wenn dies für irgend einen Werth von x der Fall ist, so findet es um so mehr für jeden noch kleineren Werth von x Statt.

Der Beweis ist folgender:

Die Reihe $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1}$ summirt giebt bekanntlich $\frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}$. Wenn $x < 1$, und $n = \infty$, so ist die Summe der unendlichen Reihe $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$, weil dann x^n verschwindet. Ist nun C der grösste der Coefficienten b, c, d, ...,

so ist offenbar, wenigstens so lange x positiv oder absolut gedacht ist, die Summe der unendlicheu Reihe $bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots$ kleiner als die Summe der unendlichen Reihe $Cx + Cx^2 + Cx^3 + Cx^4 + \ldots$, das ist kleiner als $\frac{Cx}{1-x}$, jede dieser Summen absolut genommen. Da man nun x offenbar klein genug nehmen kann, so dass $\frac{Cx}{1-x}$, absolut genommen, kleiner als irgend eine gegebene Zahl a werden kann, so folgt sogleich die obige Behauptung.

Eben deshalb kann man nun auch x klein genug nehmen, dass b grösser wird als die Summe aller übrigen Glieder der Reihe $b + cx + dx^2 + ex^3 + \ldots$, sowohl b als die letztere Summe absolut genommen. Und dann, wenn man auf beiden Seiten mit x, x^2, x^3, u. s. w. multiplicirt, so dass die Reihen $bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$ oder $bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots$ oder $bx^3 + cx^4 + dx^5 + \ldots$ erhalten werden, folgt, dass man auch jedesmal x so klein nehmen könne, dass in jeder der letztern Reihen das erste Glied absolut genommen ebenfalls grösser wird, als die absolut genommene Summe aller übrigen Glieder derselben Reihe. — Kommen in der Reihe zum Theil negative Coefficienten vor, so gilt das Erwähnte um so stärker.

Dieser Satz lässt sich auch leicht auf eine Reihe mit beliebigen Exponenten ausdehnen, wenn nur dieselben wachsen. Daher gilt allgemein: In jeder nach steigenden Potenzen von x fortlaufenden Reihe kann man x immer klein genug nehmen, so dass das erste Glied der Reihe grösser wird, als die Summe aller folgenden (also das Vorzeichen der ganzen Reihe mit dem des ersten Gliedes übereinstimmt). Namentlich muss dies also der Fall sein, wenn x unendlich klein wird.

Das erste Glied in einer solchen Reihe ist die G r e n z e, welcher sich die Reihe immer mehr und ohne Aufhören nähert, je kleiner x gedacht wird, so dass für ein unendlich kleines x die Reihe in ihr erstes Glied übergeht. Nämlich wenn $ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \ldots$ eine Reihe mit wachsenden Exponenten vorstellt, so ist für ein hinlänglich kleines x nach dem Vorigen die Summe der ganzen Reihe von ax^α um weniger als $2bx^\beta$ verschieden; wird nun x unendlich klein, so wird der Unterschied verschwinden, also die Reihe gleich ihrem ersten Gliede.

So entsteht der bekannte Satz, dass eine unendlich kleine Grösse gegen eine endliche Grösse, eben so wie eine unendlich kleine Grösse einer höheren Ordnung gegen eine unendlich kleine Grösse einer niedrigern Ordnung verschwindet, also bei der Addition oder Subtraction wegzulassen ist.

§. 10.

Convergenz der Reihen.

Sehr oft wird eine Function in eine unendliche Reihe entwickelt, d. i. in eine Summe von unendlich vielen Gliedern.

Wenn in einer unendlichen Reihe die allgemeinen Zahlzeichen bestimmte Werthe annehmen (wobei die Form der Reihe kann verloren gehen), so ist die Reihe entweder convergent oder divergent. Sie convergirt, wenn die Reihe einem bestimmten endlichen Ausdrucke ohne Ende sich nähert, und diese Grenze ist die Summe der Reihe. Bei einer convergirenden Reihe nähert sich die Summe der n ersten Glieder einer bestimmten Grenze um so mehr, je grösser n ist, so dass die Ergänzung, wenn man beim n^{ten} Gliede abbricht, bei wachsendem n ins Unendliche der Null sich nähert. (Z. B. Jeder periodische Decimalbruch ist eine convergente Reihe). Die unendlichen Reihen müssen, ehe man sie gleich den übrigen endlichen Ausdrücken behandelt, convergent (summirbar) sein.

Eine Reihe mit wachsenden Gliedern ist immer divergent; aber das blosse Abnehmen der Glieder ist zur Convergenz noch nicht hinreichend.

Die Summe der Glieder einer Reihe kann nicht einer bestimmten Grenze sich nähern, wenn die Grösse der Glieder nicht der Null sich nähert. Dies ist sogleich evident, wenn alle Glieder dasselbe Vorzeichen haben, weil dann ihre Summe mit ihrer Anzahl ins Unendliche wachsen würde. Aber auch, wenn hier die Glieder verschiedene Vorzeichen hätten, könnten die successiven Summen sich von einer bestimmten Grösse nicht um eine unendlich klein werdende Differenz unterscheiden, weil zwei auf einander folgende Summen immer untereinander eine endliche Differenz, gleich dem letzten Gliede, haben würden. — Es ist zur Convergenz der Reihe nothwendig, aber noch nicht hinreichend, dass ihre Glieder der Null sich nähern. Z. B. die unendliche Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ ist divergent, indem ihre Summe gleich $- l\,(1 - 1) = \infty$ ist. Man muss sich immer versichern, dass der Rest der Reihe kleiner wird, als jede noch so klein gedachte Zahl. — Eine Reihe, wenn sie bei gleichen Vorzeichen der Glieder convergirt, ist offenbar noch mehr convergent bei verschiedenen Vorzeichen der Glieder.

An ganz allgemeinen Kennzeichen der Convergenz gebricht es, und man muss die besonderen Fälle untersuchen. In einigen Fällen ist die Convergenz einer Reihe leicht zu beurtheilen. Z. B.

1) Eine Reihe ist convergent, wenn ihre Glieder, von irgend einem derselben angerechnet, ohne Rücksicht auf ihre Zeichen sämmtlich kleiner sind, als die entsprechenden blos mit gleichen Zeichen

versehenen Glieder irgend einer convergirenden Reihe, z. B. der geometrischen Reihe $a + ax + ax^2 + ax^3 + \ldots$, wo $x < 1$ ist. — Eine Reihe ist daher immer convergent, wenn der grösste Werth, welchen der Quotient zweier auf einander folgenden Glieder annimmt, von irgend einem Gliede an kleiner als 1 ist; weil ihre Glieder nun eben so schnell oder noch schneller abnehmen, als die Glieder einer geometrischen Reihe $a + ax + ax^2 + ax^3 + \ldots$, wenn hier $x < 1$ ist.

Auch sieht man leicht, dass eine Reihe, welche nach aufsteigenden Potenzen von x geordnet ist (wo die Coefficienten endliche Grössen sind), immer für hinreichend kleine Werthe von x convergirt. Nämlich in der Reihe $a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$ sind die Quotienten der auf einander folgenden Glieder $\frac{a_1}{a} x$, $\frac{a_2}{a_1} x$, $\frac{a_3}{a_2} x$, u. s. w. Nimmt man nun x kleiner als den grössten Werth von $\frac{a_n}{a_{n+1}}$, so sind alle jene Quotienten kleiner als die Einheit, daher die Reihe convergent.

2) Wenn die Zeichen der Glieder einer unendlichen Reihe, wenigstens von einer gewissen Stelle an, regelmässig wechseln, so ist die unendliche Abnahme der Glieder ein sicheres Kennzeichen der Convergenz der Reihe. Denn wenn wir die Reihe

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \ldots$$

betrachten, so ist für sie die Ergänzung

$$E_n = u_n - (u_{n+1} - u_{n+2}) - (u_{n+3} - u_{n+4}) - \ldots,$$

wo alle Differenzen in den Klammern positiv sind. Es ist also $E_n < u_n$, und da u_n beliebig klein werden kann, so gilt dasselbe um so mehr von E_n.

Z. B. Die unendliche Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ ist convergent, indem ihre Summe $= l\,(1+1) = l\,2 = 0{,}6931 \ldots$

3) Convergiren zwei nach x fortlaufende Reihen für irgend einen Werth von x, so convergiren auch die Reihen, welche aus ihrer Addition oder Subtraction hervorgehen, für denselben Werth von x.

Später wollen wir noch eine aus der Betrachtung der bestimmten Integrale abgeleitete Regel über die Convergenz der Reihen erwähnen.

Die Entwickelung einer Grösse in eine convergente Reihe ist auch für die näherungsweise Bestimmung derselben sehr nützlich.

§. 11.

Coefficienten der Polynome.

In einer nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitenden Reihe

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$$

bedeuten die Coefficienten a, b, c, d, ... endliche von x unabhängige Ausdrücke, und können auch zum Theil Null sein.

Von solchen unendlichen Reihen (worunter auch die endlichen begriffen sind) gilt der folgende Satz: Wenn eine nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitende Reihe für jeden Werth von x (der zwischen Null und einer beliebigen Zahl liegt) gleich Null ist, so sind auch die Coefficienten einzeln der Null gleich.

Beweis. Es sei allgemein $a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots = 0$. Nimmt x ohne Ende ab (oder wenigstens, bis a grösser wird als die Summe aller folgenden Glieder), so folgt $a = 0$, und man hat $x(b + cx + dx^2 + \ldots) = 0$. Da dies allgemein gilt, also auch wenn x von Null verschieden ist, so muss $b + cx + dx^2 + \ldots = 0$ sein. Lässt man hier wieder x gehörig abnehmen (wenigstens bis b grösser wird als die Summe aller folgenden Glieder), so folgt $b = 0$. Durch Wiederholung des Verfahrens erhält man $c = 0$, $d = 0$, u. s. w.

Daraus folgt sogleich: Sind zwei nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitende Reihen für jedes x einander gleich, so sind auch die Coefficienten, welche zu gleichen Potenzen von x gehören, einander gleich.

Wenn nämlich $a + bx + cx^2 + \ldots = A + Bx + Cx^2 + \ldots$ für jedes x, so ist auch $(a - A) + (b - B)x + (c - C)x^2 + \ldots = 0$ für jedes x, also nach dem Vorigen $a = A$, $b = B$, $c = C$, u. s. w.

Auf diesen Satz gründet sich die sogenannte Methode der unbestimmten Coefficienten, welche sehr vieler Anwendungen fähig ist. Diese Methode gebraucht man bei Umformung in eine unendliche Reihe, wobei die Form der Reihe schon gegeben ist, und noch die Coefficienten zu bestimmen sind mittelst des angeführten Satzes.

Ist für jeden Werth der beiden Variablen x und y

$$a + bx + cy + dx^2 + gxy + hy^2 + ky^3 + lx^2y + mxy^2 + ny^3 + \ldots$$

gleich Null (wo a, b, c, ... von x und y unabhängig sind), so ist jeder von den Coefficienten gleich Null. Zum Beweise ordne man nach den Potenzen der einen Variablen. — Sind zwei solche Reihen einander gleich, so sind die Coefficienten derselben Potenzen oder Producte von x und y einander gleich. Und so weiter bei mehreren Variablen x, y, z, ...

Man wird hier überhaupt erinnert an das oft vortheilhafte Verfahren, eine Gleichung in mehrere zu zerlegen, oder mehrere Gleichungen in eine zu vereinigen.

Hat man nämlich eine Gleichung

$$R + L\lambda + M\mu + N\nu + \ldots = 0$$

und es sind λ, μ, ν völlig willkürliche Grössen, so zerfällt die Gleichung in

$$R = 0,\ L = 0,\ M = 0,\ N = 0, \ldots$$

Umgekehrt: Sind mehrere Gleichungen gegeben, und man multiplicirt sie alle, oder alle bis auf eine mit unbestimmten Multiplicatoren, so kann man durch Addition eine einzige Gleichung an die Stelle der einzelnen setzen. Bei der Anwendung denkt man sich nachher die Multiplicatoren so bestimmt, dass ein gewisser Zweck erreicht wird. Diese Methode der unbestimmten Multiplicatoren ist oft ein elegantes Verfahren.

Z. B. Dies Verfahren liefert bekanntlich eine Eliminationsmethode für n Gleichungen des ersten Grades mit n Unbekannten. Nämlich man multiplicirt n — 1 Gleichungen mit unbestimmten Factoren, und vereinigt dann sämmtliche n Gleichungen durch Addition oder Subtraction in eine einzige Gleichung, in welcher man nun jene n — 1 Factoren so bestimmt, dass die Coefficienten von n — 1 Unbekannten verschwinden, wodurch alle Unbekannte weniger eine zugleich eliminirt werden. — Auch wird ein hierzu gehöriges Beispiel später bei Bestimmung der Maxima oder Minima unentwickelter Functionen vorkommen.

§. 12.

Haupttheile der Analysis.

1) Da die ganzen rationalen Functionen von der einfachsten Form sind, so sucht man auch die andern Functionen auf die ganze rationale Form zu bringen, wobei aber eine unendliche Reihe von der Gestalt $a + bx + cx^2 + \ldots$ zum Vorscheine kommt, was man das Entwickeln der Functionen nennt.

2) Um die veränderlichen Grössen vollständig aufzufassen, hat man sich dieselben als stetig veränderlich vorzustellen.

3) Es kann sogar die Form der Function als veränderlich betrachtet werden.

Daher sind die Hauptgegenstände, womit die Analysis sich zu beschäftigen hat:

1) die **Entwickelung** der **Functionen** in **Reihen**,
2) die **Gesetze** der **stetigen Functionen**, welche in der Differential- und Integralrechnung, und
3) die **Formänderungen** der **Functionen**, welche in der Variationsrechnung betrachtet werden.

Entwickelung der Functionen in Reihen.

§. 13.

Das Entwickeln der Functionen im Allgemeinen.

Um die Vortheile, welche die einfache Form der ganzen rationalen Functionen darbietet, auch auf die übrigen Functionen ausdehnen zu können, verwandelt man diese in unendliche Reihen, deren Glieder die besagte einfache Form besitzen.

Lässt sich eine Function in eine convergirende Reihe entwickeln, welche nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitet, so kann man sie näherungsweise als ganze rationale Function von einem bestimmten Grade betrachten, indem man kleine Glieder ausser Acht lässt. Dadurch erhält man für die Function Näherungswerthe, welche dem wahren Werthe desto näher kommen, je mehr erste Glieder der Reihe genommen werden.

Zur Entwickelung einer Function in eine Reihe bedient man sich häufig der Methode der unbestimmten Coefficienten. Diese fruchtbare Methode besteht darin, dass man die gesuchte Reihe mit vorläufig unbestimmt gelassenen Coefficienten hinstellt, und die Eigenschaft der Function benutzt, um eine Gleichung zwischen zwei Reihen zu gewinnen, in deren Coefficienten die Coefficienten der gesuchten Reihe mit enthalten sind. Die Gleichheit der Reihen führt dann nach dem §. 11 auf eine Reihe von Gleichungen zwischen ihren Coefficienten, welche zur Bestimmung der unbestimmt gelassenen Coefficienten der Hauptreihe dienen. — Wenn etwa die gefundene Reihe unter keinen Umständen convergirt, oder man bei der Bestimmung der Coefficienten auf Widersprüche oder unbrauchbare Formen wie $\frac{1}{0}$ kommen sollte, so giebt sich dadurch kund, dass die angenommene Form der Reihe unzulässig ist, also die Function nicht nach ganzen positiven Potenzen von x sich entwickeln lässt.

Zunächst sind nun die Fundamental-Functionen in unendliche Reihen zu **entwickeln**. Um dies möglich zu machen, muss in $\frac{a}{x}$, $\overset{a}{x}$ und $\overset{a}{\log} x$, statt x das eben so allgemeine Zeichen $1+x$ gesetzt werden. Es ist dann $(1+x)^n$, a^x, $\overset{a}{\log}(1+x)$ zu entwickeln, wodurch die Binomialreihe, die logarithmische Reihe und die Exponential-Reihe erhalten werden.

§. 14.

Binomialreihe.

Hier ist $(1+x)^n$ in eine nach den positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe zu entwickeln.

Da man für $x=0$ sogleich $(1+x)^n = 1$ erhält, so setze man

$$(1+x)^n = 1 + ax + bx^2 + cx^3 + \ldots$$

und versuche nun Gleichungen zu bilden, aus denen sich die Coefficienten bestimmen lassen. Zu dem Ende setzen wir $x+y$ statt x, wo y ganz willkürlich; dann wird

$$\begin{aligned}(1+x+y)^n &= 1 + a(x+y) + b(x+y)^2 + c(x+y)^3 + \ldots\\ &= (1+x)^n + (a + 2bx + 3cx^2 + 4dx^3 + \ldots)\,y + \ldots\end{aligned}$$

Es ist aber

$$(1+x+y)^n = (1+x)^n \left(1 + \frac{y}{1+x}\right)^n$$

und

$$\begin{aligned}(1+x)^n\left(1+\frac{y}{1+x}\right)^n &= (1+x)^n\left(1 + a\frac{y}{1+x} + b\frac{y^2}{(1+x)^2} + c\frac{y^3}{(1+x)^3} + \ldots\right)\\ &= (1+x)^n + a(1+x)^{n-1}y + b(1+x)^{n-2}y^2 + \ldots\end{aligned}$$

Also, wenn man die beiden für $(1+x+y)^n$ gefundenen Ausdrücke vergleicht, ergiebt sich

$$a + 2bx + 3cx^2 + 4dx^3 + \ldots = a(1+x)^{n-1}$$

oder

$$(1+x)(a + 2bx + 3cx^2 + 4dx^3 + \ldots) = a(1+x)^n$$

das ist

$$\begin{aligned}&a + (a+2b)x + (2b+3c)x^2 + (3c+4d)x^3 + \ldots\\ &= a + aax + abx^2 + acx^3 + \ldots\end{aligned}$$

Demnach ist für jedes x

$$a = a;\; b = \frac{a(a-1)}{2};\; c = \frac{b(a-2)}{3};\; d = \frac{c(a-3)}{4};\; \ldots$$

Noch ist a zu bestimmen, was für jede Art der Potenzen besonders geschehen muss. Es sei $a = f(n)$, also

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= 1 + f(n)x + \ldots\\ (1+x)^{n+1} &= (1+x)\,[1 + f(n).x + \ldots] = 1 + [f(n)+1]x + \ldots\\ &= 1 + f(n+1)x + \ldots\end{aligned}$$

und folglich

$$f(n+1) = f(n) + 1$$

Nun ist für $n=1$ offenbar $f(1)=1$, also $f(2)=f(1)+1=2$, $f(3)=f(2)+1=3$, u. s. w. Wenn daher der Exponent n eine positive ganze Zahl ist, so ist $f(n)=n$.

Wenn der Exponent eine negative ganze Zahl $=-n$, so setze man

$$(1+x)^{-n}=1+f(-n)x+\ldots$$
$$=\frac{1}{(1+x)^n}=\frac{1}{1+nx+\ldots}$$

also, wenn man mit dem Nenner multiplicirt

$$1=1+[f(n)+n]x+\ldots$$

für jedes x. Demnach $f(-n)+n=o$, $f(-n)=-n$.

Ist endlich der Exponent ein Bruch $=\frac{m}{n}$, wo bekanntlich n immer als positiv angenommen werden kann, so sei

$$(1+x)^{\frac{m}{n}}=1+f\left(\frac{m}{n}\right).x+\ldots$$

also

$$(1+x)^m=\left[1+f\left(\frac{m}{n}\right).x+\ldots\right]^n$$

und folglich, weil m, n ganze Zahlen sind, nach dem Vorhergehenden:

$$1+mx+\ldots=1+n\left[f\left(\frac{m}{n}\right).x+\ldots\right]+\ldots$$
$$=1+n.f\left(\frac{m}{n}\right).x+\ldots,$$

wo alle folgenden Glieder höhere Potenzen von x enthalten. Also

$$m=n.f\left(\frac{m}{n}\right),\ f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{m}{n}$$

Es ist also für jeden positiven oder negativen, ganzen oder gebrochenen Exponenten n, immer

$$f(n)=a=n.$$

Wir bemerken noch, dass Sätze, welche allgemein für alle rationalen Zahlen gelten, auch für irrationale gelten, weil man sich den irrationalen Zahlen durch rationale ohne Ende nähern kann. So gilt die Binomialreihe auch für einen irrationalen Exponenten.

Wir haben nun als Resultat die Binomialreihe:

$$* \ (1+x)^n = 1+\frac{n}{1}x+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3+\ldots$$

welche wohl die wichtigste der ganzen Mathematik ist. Diese Reihe gilt für jeden beliebigen Exponenten n, und lauft im Allgemeinen ohne Ende fort; sie bricht nur ab, wenn n eine ganze positive Zahl ist, in welchem Falle die Reihe aus $n+1$ Gliedern besteht.

Später werden wir sehen, dass die Binomialreihe innerhalb der Grenzen $x=-1$ und $x=+1$ convergirt.

§. 15.

Beispiele von Näherungsformeln.

Wir wollen die Näherungsformeln zur Ausziehung der Wurzeln betrachten.

Man erhält näherungsweise

$$\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{a^n + b} = a\left(1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{b}{a^n}\right) = a + \frac{b}{na^{n-1}}$$

wo aber $\frac{b}{a^n}$ so klein sein muss, dass $\left(\frac{b}{a^n}\right)^2, \left(\frac{b}{a^n}\right)^3$ schon ausser Acht gelassen werden können. Um darnach aus einer Zahl A die n^{te} Wurzel zu ziehen, sucht man vorher einen solchen Näherungswerth a, dass a^n gegen b sehr klein ist, also $\frac{b}{a^n}$ ein kleiner Bruch wird. Die Formel ist um so genauer, je kleiner $\frac{b}{a^n}$.

Dasselbe lässt sich auch unter einer andern Form darstellen, wie folgt: Kennt man bereits einen genäherten Werth w der Wurzel $\sqrt[n]{A}$, und setzt den genauen Werth dieser Wurzel $= w + x$, wo x einen kleinen Bruch vorstellt, so ist $\sqrt[n]{A} = w + x$, also

$$A = (w + x)^n = w^n + nw^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2} w^{n-2} x^2 + \dots$$

Wenn nun x so klein ist, dass man bei dem beabsichtigten Grade der Genauigkeit das dritte nebst den folgenden Gliedern vernachlässigen kann, so wird

$$A = w^n + nw^{n-1} x, \text{ also } x = \frac{A - w^n}{nw^{n-1}}.$$

Behält man aber noch das dritte Glied bei, so folgt

$$x = \frac{A - w^n}{nw^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} w^{n-2} x}$$

oder, wenn man in den Nenner dieses Ausdrucks für x den vorigen Näherungswerth substituirt

$$x = \frac{2w(A - w^n)}{(m+1) w^n + (m-1) A}$$

§. 16.

Logarithmische Reihe.

Hier ist log $(1+x)$ in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe zu entwickeln.

Zu diesem Zwecke setze man, mit Berücksichtigung, dass $\log 1 = o$ ist,

$$\log(1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots$$

und lasse x in $x+y$ übergehen, wo y ganz willkürlich sein soll; dann wird

$$\log(1+x+y) = A(x+y) + B(x+y)^2 + \ldots$$

also

$$\log(1+x+y) - \log(1+x)$$
$$= A[(x+y)-x] + B[(x+y)^2 - x^2] + C[(x+y)^3 - x^3] + \ldots$$

das ist

$$\log\left(1 + \frac{y}{1+x}\right) = (A + 2Bx + 3Cx^2 + \ldots)\, y + \ldots$$
$$= \frac{A}{1+x}\, y + \ldots$$

Demnach

$$\frac{A}{1+x} = A + 2Bx + 3Cx^2 + \ldots$$

oder

$$A = A + (A+2B)\, x + (2B+3C)\, x^2 + \ldots$$

woraus folgt

$$B = -\frac{1}{2}A,\ C = \frac{1}{3}A,\ D = -\frac{1}{4}A,\ \ldots$$

Daher

$$\log(1+x) = A\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots\right)$$

Es ist also nur noch A zu bestimmen. Setzt man, wenn b die Basis bezeichnet, $x = b-1$, so hat man

$$1 = A\left[(b-1) - \frac{1}{2}(b-1)^2 + \frac{1}{3}(b-1)^3 - \frac{1}{4}(b-1)^4 + \ldots\right]$$

also

$$A = \frac{1}{(b-1) - \frac{1}{2}(b-1)^2 + \frac{1}{3}(b-1)^3 - \frac{1}{4}(b-1)^4 + \ldots}$$

Gewöhnlich wird A der **Modulus** des Systemes genannt, und durch M bezeichnet.

Wir haben nun als Resultat die logarithmische Reihe:

$$\overset{b}{\log}(1+x) = M\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots\right)$$

wo
$$M = \frac{1}{(b-1) - \frac{1}{2}(b-1)^2 + \frac{1}{3}(b-1)^3 - \frac{1}{4}(b-1)^4 + \ldots}$$

Nimmt man, als einfachsten und natürlichsten Fall, $M = 1$, so heissen die Logarithmen **natürliche**, und mögen durch ein blosses l bezeichnet werden, so dass also

$$* \quad l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$$

welche Reihe, wie später bewiesen wird, innerhalb der Grenzen $x = -1$ und $x = +1$ (letztere inbegriffen) convergirt.

Es ergiebt sich

$$* \quad \overset{b}{\log} z = Mlz = \frac{1}{lb}\, lz$$

also

$$M = \frac{1}{lb} = \overset{b}{\log} e$$

§. 17.

Eine Näherungsformel.

Es ist

$$\log(x+y) - \log x = \log\left(1 + \frac{y}{x}\right) = M\left(\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\frac{y^2}{x^2} + \ldots\right)$$

und

$$\log(x+z) - \log x = \log\left(1 + \frac{z}{x}\right) = M\left(\frac{z}{x} - \frac{1}{2}\frac{z^2}{x^2} + \ldots\right)$$

Je grösser nun x ist, und je kleiner y und z sind, desto kleiner sind die Brüche $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{x}$, und um so kleiner sind ihre zweiten, dritten und höheren Potenzen; desto genauer ist

$$\frac{\log(x+y) - \log x}{\log(x+z) - \log x} = \frac{y}{z} = \frac{(x+y) - x}{(x+z) - x}$$

d. h. Die Differenzen der Logarithmen grosser aber wenig von einander verschiedener Zahlen verhalten sich wie die Differenzen dieser Zahlen desto genauer, je grösser die Zahlen und je weniger sie von einander verschieden sind. Auf diesem Satze beruht das Interpoliren der logarithmischen Tafeln.

§. 18.

Exponentialreihe.

Wir wollen a^x entwickeln.

Zu diesem Zwecke setzen wir, mit Berücksichtigung, dass $a^0 = 1$ ist,

$$a^x = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots$$

Wird nun $x+y$ statt x gesetzt, so erhält man

$$a^{x+y} = 1 + A(x+y) + B(x+y)^2 + C(x+y)^3 + \ldots$$
$$= a^x + (A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \ldots)y + \ldots$$
$$= a^x . a^y = a^x(1 + Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \ldots)$$
$$= a^x + Aa^xy + Ba^xy^2 + Ca^xy^3 + \ldots$$

für jedes y. Also

$$A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \ldots$$
$$= Aa^x = A + AAx + ABx^2 + ACx^3 + \ldots$$

für jedes x. Folglich

$$A = A;\ B = \frac{A^2}{1.2};\ C = \frac{A^3}{1.2.3};\ D = \frac{A^4}{1.2.3.4};\ \text{u. s. f.}$$

Um noch A zu bestimmen, setze $a = 1 + \alpha$, dann ist

$$a^x = 1 + \frac{x}{1}\alpha + \frac{x(x-1)}{1.2}\alpha^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\alpha^3 + \ldots$$
$$= 1 + \left(\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{3}\alpha^3 - \frac{1}{4}\alpha^4 + \ldots\right)x + \ldots$$

Also

$$A = \alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{3}\alpha^3 - \frac{1}{4}\alpha^4 + \ldots$$
$$= (a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \frac{1}{4}(a-1)^4 + \ldots$$

d. i. nach dem Obigen

$$A = la$$

Man hat demnach als Resultat die Exponentialreihe:

$$a^x = 1 + \frac{la}{1}x + \frac{la^2}{1.2}x^2 + \frac{la^3}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

Bezeichnet man, wie allgemein zu geschehen pflegt, die Basis der natürlichen Logarithmen durch e, so wird

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

Es ergiebt sich

$$a^x = e^{xla}$$

Die Exponentialreihe hat den unschätzbaren Vorzug, dass sie für jeden endlichen Werth von x convergirt.

In der letzten Reihe $x = 1$ gesetzt, giebt:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots = 2{,}7182818284 \ldots$$

§. 19.

Ableitung der binomischen, logarithmischen und Exponential-Reihe aus einer gemeinschaftlichen Reihe.

Es sei die unendliche Reihe gegeben

$$1 + ax + a(a+k)\frac{x^2}{1.2} + a(a+k)(a+2k)\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

welche wir durch f(a) bezeichnen. Verwandelt man a in b, so hat man ebenso:

$$1 + bx + b(b+k)\frac{x^2}{1.2} + b(b+k)(b+2k)\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots = f(b)$$

Wenn man diese beiden Reihen multiplicirt, so erhält man, nach einigen einfachen Reductionen:

$$1 + (a+b)x + (a+b)(a+b+k)\frac{x^2}{1.2}$$
$$+ (a+b)(a+b+k)(a+b+2k)\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

welcher Ausdruck durch f(a + b) zu bezeichnen ist. Daraus folgt also, dass unsere eingeführte Function f die Eigenschaft hat, dass immer

(1) $$f(a).f(b) = f(a+b)$$

und zugleich f(o) = 1 sein muss.

I. Setzt man in der Gleichung (1) statt b die Grösse b + c, so hat man

$$f(a).f(b+c) = f(a+b+c),$$

oder, da bereits f(b + c) = f(b). f(c) war:

$$f(a).f(b).f(c) = f(a+b+c);$$

und ebenso findet man auch

$$f(a).f(b).f(c).f(d) = f(a+b+c+d) \text{ u. s. w.}$$

Nimmt man aber in diesen Ausdrücken a = b = c ..., und setzt die Anzahl dieser Buchstaben gleich n, so geht die letzte Gleichung in folgende über:

(2) $$[f(a)]^n = f(na)$$

Setzt man aber in der Gleichung (1) oder in f(b). f(c) = f(b + c) die Grösse c = a — b, so erhält man

(3) $$\frac{f(a)}{f(b)} = f(a-b)$$

Endlich giebt die Gleichung (2), oder $[f(b)]^n = f(nb)$, wenn man in ihr nb = a setzt:

$$\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^n = f(a), \text{ oder}$$

(4) $$\sqrt[n]{f(a)} = f\left(\frac{a}{n}\right)$$

II. Drücken wir nun die Gleichung (2) umständlich durch die ihr entsprechenden Reihen aus, so hat man

$$\left(1 + ax + a(a+k)\frac{x^2}{1.2} + a(a+k)(a+2k)\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\right)^n$$

$$= 1 + na.x + na(na+k)\frac{x^2}{1.2} + na(na+k)(na+2k)\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

Setzt man in diesem Ausdrucke $a = 1$ und $k = -1$, so erhält man sofort

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.x^3 + \ldots,$$

was die Binomialreihe ist.

III. Setzt man aber in demselben Ausdrucke $k = 0$, $a = x = 1$ und $n = hx$, so erhält man

$$\left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots\right)^{hx} = 1 + \frac{hx}{1} + \frac{h^2x^2}{1.2} + \frac{h^3x^3}{1.2.3} + \ldots$$

Von dieser Gleichung ist aber das erste Glied gleich e^{hx}, wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet; also ist auch

$$e^{hx} = 1 + \frac{hx}{1} + \frac{h^2x^2}{1.2} + \frac{h^3x^3}{1.2.3} + \ldots$$

Setzt man hier $a = e^h$ oder $h = la$, so hat man

$$a^x = 1 + \frac{x}{1}la + \frac{x^2}{1.2}(la)^2 + \frac{x^3}{1.2.3}(la)^3 + \ldots$$

was die Exponentialreihe ist.

IV. Setzt man endlich in dem letzten Ausdrucke $x = n$ und $a = 1 + x$, so hat man

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}l(1+x) + \frac{n^2}{1.2}[l(1+x)]^2 + \ldots$$

Da aber bereits oben erhalten wurde

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \ldots,$$

so hat man, wenn man beide Ausdrücke einander gleich setzt:

$$l(1+x) + \frac{n}{1.2}[l(1+x)]^2 + \frac{n^2}{1.2.3}[l(1+x)]^3 + \ldots$$
$$= x + (n-1)\frac{x^2}{1.2} + (n-1)(n-2)\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots;$$

also auch, wenn man in diesem Ausdrucke $n = o$ setzt:

$$l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots,$$

welches die logarithmische Reihe ist.

§. 20.

Zusammenhang zwischen den betrachteten Reihen.

Es ergiebt sich ferner, dass mittelst des Unendlichen ein Uebergang aus der Binomialreihe in die logarithmische sowohl als in die Exponentialreihe stattfindet. Nämlich wenn μ eine unendlich abnehmende, und ν eine unendlich wachsende Zahl bedeutet, so wird (wenn man die unendlichen Factoren gegeneinander aufhebt)

$$(1+\mu x)^{\frac{1}{\mu}} = e^x, \text{ oder } \left(1+\frac{x}{\nu}\right)^\nu = e^x$$

und

$$\frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu} = l(1+x), \text{ oder } \nu\left(y^{\frac{1}{\nu}} - 1\right) = ly$$

Diese beiden merkwürdigen Ausdrücke gewähren eine Vergleichung dieser transcendenten Functionen mit den algebraischen, wornach sich e^x als eine Potenz von unendlich grossem, lx als eine Potenz von unendlich kleinem Exponenten betrachten lässt.

Die Exponential-Function führt mittelst des Imaginären zu den Kreisfunctionen.

§. 21.

Kreisfunctionen.

Setzt man in der Exponentialreihe den Exponenten imaginär, so treten die Kreisfunctionen auf. Es ist

* $$e^{xi} = \cos x + i \sin x;\ e^{-xi} = \cos x - i \sin x$$

wo

* $$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \cdots$$

* $$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} + \cdots$$

welche Reihen für jeden endlichen Werth von x convergiren.

Hier, wie immer, bezeichnet i das $\sqrt{-1}$, und zwar irgend einen, aber jedesmal denselben seiner beiden Werthe.

Daraus ergeben sich folgende Formeln:

$$\sin o = o;\ \cos o = 1$$

$$\sin(-x) = -\sin x;\ \cos(-x) = \cos x$$

$$\sin x^2 + \cos x^2 = 1$$

Wegen der letzten Gleichung können $\sin x$, $\cos x$, wenn x reell ist, nur von -1 bis $+1$ wachsen.

Ferner ist:

$$* \quad \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$* \quad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

für jedes beliebige x und y; aus welchen beiden Grundformeln alle fernern Gleichungen zwischen Kreisfunctionen sich ableiten lassen.

Bezeichnet man den kleinsten positiven Werth von x, für welchen $\sin x = \cos x$, durch $\frac{\pi}{4}$, so hat man $\cos\frac{1}{4}\pi = \sin\frac{1}{4}\pi$; ferner $1 = \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2 = 2\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2$. Also vermöge der Gleichungen $\cos 2x = \cos x^2 - \sin x^2$ und $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ erhält man

$$\cos\frac{1}{2}\pi = 0;\ \sin\frac{1}{2}\pi = 1$$
$$\cos\pi = -1;\ \sin\pi = 0$$

Setzt man in den beiden Grundformeln $a = b = \pi$, ferner $a = b = 2\pi$, ferner $a = 4\pi$ und $b = 2\pi$, u. s. w., so erhält man $\cos 2n\pi = 1$ und $\sin 2n\pi = 0$; und weil $\cos x = \cos(-x)$ und $\sin x = -\sin(-x)$, so ist $\cos \pm 2n\pi = 1$ und $\sin \pm 2n\pi = 0$.

Setzt man in den beiden Grundformeln $a = x$ und $b = 2n\pi$, so erhält man

$$\cos(x + 2n\pi) = \cos x$$
$$\sin(x + 2n\pi) = \sin x$$

wo n jede ganze positive oder negative Zahl bedeutet. Also unendlich viele Bogen können denselben Sinus, Cosinus haben.

Daher sind die Kreisfunctionen **periodische** Functionen; die Periode ist $= 2\pi$.

Es ergiebt sich auch

$$\cos(xi) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$
$$\sin(xi) = \frac{-1}{2i}(e^x - e^{-x})$$

Wir bemerken noch, dass $\tan x$ bedeutet $\frac{\sin x}{\cos x}$, und $\cot x$ bedeutet $\frac{1}{\tan x}$.

§. 22.

Näherungsformeln.

I. Im Falle x eine sehr kleine Zahl ist, hat man die **Näherungsformeln** $\sin x = x$ und $\cos x = 1$, welche in den verschie-

denen Anwendungen häufig vorkommen. Ist z. B. $x = \frac{\pi}{180.60.60}$, so würde $\sin x$ mit x bis auf 12 Decimalstellen, und $\cos x$ mit 1 bis auf 9 Decimalstellen übereinstimmen. Selbst wenn $x = \frac{\pi}{180.60}$, so stimmt $\sin x$ mit x bis auf 9 Decimalstellen, und $\cos x$ mit 1 bis auf 7 Decimalstellen.

II. Es ist $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

und $\sin(x+z) = \sin x \cos z + \cos x \sin z$

Sind nun y und z so kleine Grössen, dass man bei der Entwickelung ihrer Sinus und Cosinus die höheren Potenzen von y und z vernachlässigen kann, so erhält man die Näherungsformel:

$$\frac{\sin(x+y) - \sin x}{\sin(x+z) - \sin x} = \frac{y}{z} = \frac{(x+y)-x}{(x+z)-x}$$

d. h. die Differenzen der Sinus wenig von einander verschiedener Bogen verhalten sich wie die Differenzen dieser Bogen, und zwar mit desto mehr Genauigkeit, je weniger die Bogen von einander verschieden, d. h. je kleiner y und z sind. Ein analoger Satz gilt auch von den Cosinus, u. s. w. Hierauf beruht das Interpoliren der trigonometrischen Tafeln.

§. 23.

Inverse Kreisfunctionen (oder Bogen).

Wenn man die Gleichungen

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x$$
$$e^{-xi} = \cos x - i \sin x$$

durch einander dividirt, ergiebt sich

$$e^{2xi} = \frac{\cos x + i \sin x}{\cos x - i \sin x} = \frac{1 + i \tang x}{1 - i \tang x}$$

Nimmt man nun die Logarithmen, so findet sich

$$x = \frac{1}{i} \, l(\cos x + i \sin x)$$

$$x = \frac{1}{2i} \, l \frac{1 + i \tang x}{1 - i \tang x}$$

oder anders geschrieben:

$$\operatorname{arc} \sin y = \frac{1}{i} \, l(\sqrt{1-y^2} + iy)$$

$$\operatorname{arc} \cos y = \frac{1}{i} \, l(y + i\sqrt{1-y^2})$$

$$\operatorname{arc\,tang} y = \frac{1}{2i}\, l\, \frac{1+iy}{1-iy}$$

Mittelst dieser Formeln kann man nun öfters imaginär scheinende logarithmische Ausdrücke in reelle Bogen, oder auch (im Falle y selbst imaginär sein sollte) Ausdrücke mit imaginären Bogen oft in reelle Logarithmen verwandeln, was für die Berechnung und Anwendung der Ausdrücke nothwendig ist.

Mit Hülfe der letzten Gleichungen kann man auch umgekehrt einen Logarithmen durch einen Bogen ausdrücken. Nämlich setzt man $\sqrt{1-y^2}+iy=z$, so findet man

$$lz = i.\operatorname{arc\,sin} \frac{z^2-1}{2zi};$$

oder setzt man $\frac{1+iy}{1-iy}=z$, so erhält man

$$lz = 2i.\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1+z}{1-z}\,i\right).$$

Wenn man in der Gleichung

$$x = \frac{1}{2i}\, l\, \frac{1+i\operatorname{tang} x}{1-i\operatorname{tang} x}$$

den Logarithmen in Reihen verwandelt, so erhält man eine Reihe, welche den Bogen durch die Tangente ausdrückt. Nämlich es ist

$$l\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = l(1+z) - l(1-z) = 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \ldots\right)$$

Setzt man hier $z = i\operatorname{tang} x$, so erhält man vermittelst der vorletzten Gleichung

$$x = \operatorname{tang} x - \frac{1}{3}\operatorname{tang} x^3 + \frac{1}{5}\operatorname{tang} x^5 - \frac{1}{7}\operatorname{tang} x^7 + \ldots$$

oder

$$\operatorname{arc\,tang} y = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \ldots$$

Diese Reihe convergirt nur für Werthe von $\operatorname{tang} x$, welche zwischen -1 und $+1$ liegen (beide Grenzen inbegriffen).

Setzt man in dieser Reihe $x = \frac{\pi}{4}$, also $\operatorname{tang} x = 1$, so erhält man:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

und

$$\pi = 3{,}1415926535\ldots$$

§. 24.

Vergleichung der betrachteten Functionen.

Es wird später nachgewiesen, dass die Function z^a durch die Gleichung

$$f(x) \cdot f(y) = f(xy),$$

die Function $\overset{a}{\log} z$ durch die Gleichung

$$f(x) + f(y) = f(xy),$$

und die Function a^x durch die Gleichung

$$f(x) \cdot f(y) = f(x + y)$$

charakterisirt wird.

Wir haben bereits gesehen, dass die Functionen $\sin x$, $\cos x$ durch Exponentialfunctionen, und $\arcsin x$, $\arccos x$ durch Logarithmen sich ausdrücken lassen. Ferner ist $x^a = e^{alx}$. Also lassen sich die genannten Functionen auf Exponentialgrössen und Logarithmen reduciren, während diese letzteren Functionen e^x, lx irreductibel sind.

§. 25.

Periodische Functionen.

In den Kreisfunctionen wurzeln die periodischen Functionen überhaupt, welche sehr wichtig sind. Periodisch heisst eine Function, welche periodisch (in derselben Ordnung wiederkehrend) dieselben Werthe annimmt, also ihren Werth nicht ändert, wenn man für die unabhängig veränderliche Grösse Werthe substituirt, die um gleiche Grössen von einander verschieden sind. Die Grösse dieses Unterschiedes oder dieser Intervalle misst den Umfang der Periode. Also die Differenz einer periodischen Function von x, deren Periode gleich k, ist Null für $\varDelta x = k$.

Wenn n eine ganze Zahl bedeutet, so sind $\sin nx$, $\cos nx$, $\tan nx$ periodische Functionen, deren Periode $\frac{2\pi}{n}$ ist. Die Function $a \sin (b + cx)$ ist periodisch für das Intervall $\frac{2n\pi}{c}$.

Mittelst der Kreisfunctionen kann man eine periodische Function von einer beliebigen Periode bilden. Die Functionen $a \sin \frac{2\pi}{k} x$, $a \cos \frac{2\pi}{k} x$, $a \sin \left(b + \frac{2n\pi}{k} x\right)$ oder eine Summe ähnlicher Grössen,

$F\left(\sin\frac{2\pi x}{k}, \cos\frac{2\pi x}{k}\right)$ sind periodische Functionen von der Periode k, d. h. die Function nimmt immer dieselben Werthe wieder an, wenn man $x+k$, $x+2k$, $x+3k$, ... für x substituirt. — Jede periodische Function kann durch eine Reihe dargestellt werden, deren $(n+1)^{tes}$ Glied die Form $A_n \sin\frac{2n\pi x}{k} + B_n \cos\frac{2n\pi x}{k}$ hat, wo k die Grösse der Periode ist.

Die Natur bietet eine Menge von Erscheinungen dar, welche dem Gesetze der Periodicität unterliegen.

Die Kreisfunctionen sin x, u. s. w. sind für reelle Werthe der Veränderlichen x periodisch, aber sie hören auf periodisch zu sein, wenn man die Veränderliche eine Reihe imaginärer Werthe $x\sqrt{-1}$ durchlaufen lässt, weil sie sich alsdann in Exponentialfunctionen verwandeln. Für die Exponentialfunction e^x findet das Umgekehrte Statt. Nämlich es erscheint e^x als eine periodische Function, aber sie hat eine imaginäre Periode, indem $e^{x+2n\pi i} = e^x e^{2n\pi i} = e^x$ ist.

§. 26.

Vielwerthigkeit der Formen.

Aus der periodischen Beschaffenheit der Kreisfunctionen $y = \sin x$, $y = \cos x$ folgt, dass die inversen Kreisfunctionen (oder Bogen) $x = \arcsin y$, $x = \arccos y$ für dasselbe y unendlich viele Werthe haben.

Sind für einen Bogen sowohl Sinus als Cosinus gegeben, so gehören dazu unendlich viele in $\varphi + 2n\pi$ enthaltene Bogen, wo φ der kleinste positive zugehörige Bogen sei, während n jede ganze (positive oder negative) Zahl bedeutet. — Daher entspringt die Vielwerthigkeit analytischer Formen überhaupt.

Wir betrachten den allgemeinen Ausdruck $p + qi$, wo p und q reell sind, und i das $\sqrt{-1}$ bedeutet. Hier ergiebt sich leicht, da eine reelle Grösse keiner imaginären gleich sein kann, der Satz:

Wenn $p + qi = p_1 + q_1 i$

so folgt $p = p_1$ und $q = q_1$

Also wenn $p + qi = o$, so muss einzeln $p = o$ und $q = o$ sein.

Der Ausdruck $p + qi$ geht in eine reelle Grösse über, sobald $q = o$ wird.

Jeder Ausdruck $p + qi$ lässt sich auf die Form $\varrho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ reduciren, wo ϱ und φ reell sind. Setzt man nämlich

$$p + qi = \varrho (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

so erhält man durch Vergleichung:

$$\varrho = \sqrt{p^2 + q^2}, \quad \cos\varphi = \frac{p}{\varrho}, \quad \sin\varphi = \frac{q}{\varrho}$$

Der Bequemlichkeit wegen ist man übereingekommen, ϱ, welches der Modulus des imaginären Ausdrucks heisst, stets positiv zu nehmen.

Man hat nun auch:

$$q + qi = \varrho . e^{\phi i}$$

Durch diese Reduction von $p + qi$ wird das Rechnen mit solchen Ausdrücken sehr vereinfacht.

Setzt man in der früheren Formel

$$e^{\phi i} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

$\varphi + 2n\pi$ statt φ, wo n jede (positive oder negative) ganze Zahl, auch Null, bedeutet, so erhält man wegen

$$\cos(\varphi + 2n\pi) = \cos\varphi, \text{ und } \sin(\varphi + 2n\pi) = \sin\varphi$$

die allgemeine Formel

$$e^{(\phi + 2n\pi)i} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

Man hat also vollständig:

$$p + qi = \varrho . e^{(\phi + 2n\pi)i}$$

Demnach kann jede Grösse $p + qi$ auf unzählige Arten aus einer natürlichen Potenz mit imaginärem Exponenten entstehen, nämlich durch

$$\varrho e^{\phi i}, \ \varrho e^{(\phi + 2\pi)i}, \ \varrho e^{(\phi + 4\pi)i}, \ \varrho e^{(\phi + 6\pi)i}, \ldots$$

Rechnet man nun mit $p + qi$, und beachtet dabei dessen verschiedene Entstehungsarten, so können mehrfache Werthe entstehen.

Für $q = o$ ist $p + qi$ reell und man erhält

$$\varrho = a, \ \phi = o$$
$$\text{oder } \varrho = -a, \ \phi = \pi$$

Beim Modulus von $p + qi$ kommt es auf das Vorzeichen von p und q nicht an, das heisst

$$p + qi, \ p - qi, \ -p + qi, \ -p - qi$$

haben dasselbe ϱ.

Man sieht nun leicht, dass alle Operationen immer wieder auf die erwähnte Form führen. Nämlich

$$(p + qi) + (p_1 + q_1 i) = (p + p_1) + (q + q_1)i$$
$$(p + qi) - (p_1 + q_1 i) = (p - p_1) + (q - q_1)i$$
$$(p + qi)(p_1 + q_1 i) = \varrho . e^{\phi i} . \varrho_1 e^{\phi_1 i} = \varrho\varrho_1 . e^{(\phi + \phi_1)i}$$
$$(p + qi) : (p_1 + q_1 i) = \varrho . e^{\phi i} : \varrho_1 e^{\phi_1 i} = \frac{\varrho}{\varrho_1} e^{(\phi - \phi_1)i}$$
$$(p + qi)^y = (\varrho . e^{\phi i})^y = \varrho^y . e^{y\phi i} = \varrho^y (\cos y\varphi + i \sin y\varphi)$$

Da man hier statt φ auch $\varphi + 2n\pi$ setzen kann, so ergeben sich für die Potenz $(p+qi)^y$ im Allgemeinen unendlich viele Werthe. Wenn dabei y eine ganze (positive oder negative) Zahl ist, so sind diese Werthe alle einander gleich; aber wenn $y = \frac{m}{n}$ ein in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückter (positiver oder negativer) Bruch ist, so kommen diese Werthe auf n verschiedene zurück, welche periodisch fortwährend wiederkehren.

Daher, wenn die Vielwerthigkeit eines Ausdrucks durch Doppel-Klammern bezeichnet wird, so hat man

$$\begin{aligned}((p+qi))^y &= \varrho^y \, [\cos y(\varphi + 2n\pi) + i \sin y(\varphi + 2n\pi)] \\ &= \varrho^y . e^{y(\varphi + 2n\pi)i} = \varrho^y . e^{y\varphi i} . e^{2n\pi y i} \\ &= \varrho^y . e^{y\varphi i} \, ((1))^y\end{aligned}$$

wo ϱ^y den arithmetischen Werth bedeutet.

Die verschiedenen Werthe der Potenz bilden, wie man sieht, eine geometrische Progression.

Es ergiebt sich ferner

$$\begin{aligned}l(p+qi) &= l[\varrho(\cos\varphi + i \sin\varphi)] \\ &= l\varrho + l(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= l\varrho + \varphi i\end{aligned}$$

wo $l\varrho$ den arithmetischen Logarithmus (einer positiven Zahl) bedeutet. Da man auch hier $\varphi + 2n\pi$ statt φ setzen kann, so gehen unendlich viele Werthe des allgemeinen Logarithmus hervor, die alle verschieden sind. Man kann schreiben:

$$l((p+qi)) = l\varrho + (\varphi + 2n\pi)i = l\varrho + \varphi i + l((1))$$

Hieraus erhält man auch: $\pi = \frac{l(-1)}{i} = \frac{2li}{i}$

Für die Logarithmen eines anderen beliebigen Systemes gilt:

$$((\overset{a}{\log}))\, x = \frac{l((x))}{la} = Ml((x))$$

Bei einer Potenz mit imaginärem Exponenten wende man die Formel

$$((x))^y = e^{y((lx))}$$

an, und kommt dann zu

$$e^{p+qi} = e^p . e^{qi} = e^p(\cos q + i \sin q)$$

Beim Rechnen mit vielwerthigen Ausdrücken ist die nöthige Vorsicht und Sorgfalt zu beachten, um Irrthümer zu vermeiden.

§. 27.

Anwendung der Kreisfunctionen bei Umformungen.

Indem wir die höchst wichtige Anwendung, welche die Kreisfunctionen in der Geometrie finden, hier als bekannt voraussetzen, wollen wir anhangsweise noch kurz erwähnen, dass die Kreisfunctionen häufig zu nützlichen Transformationen in der Analysis gebraucht werden.

I. Jede reelle Zahl kann man als Tangente oder Cotangente betrachten; jede Zahl, die nicht grösser als 1 ist, lässt sich als Sinus oder Cosinus ansehen; auch kann man immer $x = q \cos\varphi$ setzen; u. s. w. Durch einen solchen Kunstgriff werden Auflösungen möglich, welche auf andere Art schwer oder gar nicht ausführbar sein dürften.

II. Es kann Zweck sein, eine Formel für die logarithmische Rechnung bequem zu machen. Dabei führt man Hülfsgrössen ein.

Beispiele sind folgende:

Man will ein Binom auf ein Monom reduciren: Für $n = a + b$ erhält man $n = \frac{a}{\cos\phi^2}$, wenn $\tang\phi^2 = \frac{b}{a}$ gesetzt wird. Für $n = a - b$ erhält man $n = b \tang\phi^2$, wenn $\cos\phi^2 = \frac{b}{a}$ gesetzt wird.

Die Formel $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$ wird für das Rechnen mit Logarithmen bequemer, wenn man die Hülfsgrösse ϕ einführt mittelst der Formel $\frac{2\sqrt{ab}\sin \frac{1}{2}C}{a-b} = \tang\phi$, wonach $c = \frac{a-b}{\cos\phi}$ wird.

Die Wurzeln einer quadratischen Gleichung lassen sich durch Einführung einer Hülfsgrösse ϕ in einer für logarithmische Rechnung bequemeren Form darstellen. Z. B. Um die Gleichung $x^2 - ax + b = o$ aufzulösen, setzt man $\sin 2\phi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$, und findet die Wurzeln nach den Formeln $x = a \sin\phi^2$, und $x = a\cos\phi^2$.

Diese und ähnliche Umformungen beruhen darauf, dass zwischen den Kreisfunctionen Relationen bestehen, in welchen zwei- oder auch mehrgliedrige Ausdrücke eingliedrigen gleich erscheinen.

III. Die Kreisfunctionen werden öfters zur Auflösung der Gleichungen benutzt.

Beispiele sind:

Die reellen Wurzeln einer cubischen Gleichung lassen sich bekanntlich am leichtesten mit Hülfe der Kreisfunctionen logarithmisch berechnen, und diese

Auflösungsart verdient vor anderen Formeln bei Weitem den Vorzug. Dabei führt man zwei Hülfsgrössen ein. Z. B. Die cubische Gleichung sei

$$x^3+ax-b=0, \text{ wo } a \text{ und } b \text{ positiv.}$$

Setzt man nun

$$\frac{2a}{3b}\sqrt{\frac{a}{3}}=\tang\varphi \text{ und } \sqrt[3]{\tang\frac{1}{2}\varphi}=\tang\psi$$

so ist die reelle Wurzel

$$x=2\cot 2\psi.\sqrt{\frac{a}{3}}$$

Um die Gleichung

$$a\sin x+b\cos x=c$$

aufzulösen, setze man

$$\tang\varphi=\frac{b}{a}, \text{ woraus folgt } \sin(\varphi+x)=\frac{c}{a}\cos\varphi$$

IV. Ueberhaupt ist es oft zu bestimmten Zwecken vortheilhaft, eine Gleichung mittelst Einführung von einer oder zwei Hülfsgrössen φ, ψ in zwei oder drei Gleichungen zu zerlegen, welches Verfahren das entgegengesetzte vom Eliminiren ist. Dabei bedient man sich häufig der Kreisfunctionen.

Eine Gleichung zwischen 2 Veränderlichen drückt man öfters mittelst Einführung einer Hülfsgrösse φ durch zwei Gleichungen aus. Eliminirt man die Hülfsgrösse, welche das Verbindungsmittel zwischen den beiden Gleichungen ist, so muss man wieder die ursprüngliche Gleichung erhalten.

Z. B. Die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

kann man durch die beiden folgenden ersetzen:

$$\left.\begin{array}{l} x=a\cos\varphi \\ y=b\sin\varphi \end{array}\right\}$$

Auch ist es oft bequem zu ferneren Rechnungen, eine Gleichung zwischen 3 Veränderlichen durch 3 Gleichungen zwischen 2 willkürlichen Hülfsgrössen φ und ψ auszudrücken.

Z. B. Für die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$

kann man auch das gleichbedeutende System der drei Gleichungen setzen

$$x=a\cos\varphi\cos\psi,\ y=b\sin\varphi\cos\psi,\ z=c\sin\psi$$

Differentialrechnung

I. Einleitung.

§. 28.

Gegenstand der Differential- und Integralrechnung.

Ferner an die Function uns haltend, betrachten wir in der Differential- und Integralrechnung das Gesetz ihrer stetigen Veränderung. Die grösste Schwierigkeit, welche die Mathematik im Verlaufe ihrer stufenweisen Ausbildung zu überwinden hatte, war die Lösung der Aufgabe: das Gesetz der Stetigkeit auf Begriffe zu bringen, das heisst der Rechnung zu unterwerfen. Dies leistet die höhere Analysis. Nämlich die Differential- und Integralrechnung beschäftigt sich mit stetig veränderlichen Grössen, um dieselben in Rechnung zu bringen. Während die Analysis die Theorie der Functionen überhaupt enthält, ist die Differential- und Integralrechnung die Theorie der stetigen Functionen. Differential- und Integralrechnung zusammen heissen Infinitesimalrechnung (oder Analysis des Unendlichen).

§. 29.

Stetigkeit und Unendlichkleines.

Die stetig veränderliche Grösse wächst um unendlichkleine Differenzen. So hängt der Begriff des Stetigen mit dem des Unendlichkleinen zusammen. Wir verweisen hier auf §. 6 und §. 7.

Die Differential- und Integralrechnung, welche die Gesetze stetig veränderlicher Grössen betrachtet, ist auch bei der Anwen-

dung höchst wichtig, weil überall Grössen in stetiger Veränderung vorkommen, so dass der Begriff des Stetigen und Unendlichkleinen überall seine Anwendung findet.

Zum Beispiel: Beim irrationalen Verhältniss von Grössen ist ihr gemeinschaftliches Maass unendlichklein; jede irrationale Zahl unterscheidet sich um weniger als jede gegebene Grösse von möglichen Rationalzahlen. — Raum, Zeit, Kraft sind stetige Grössen, d. h. ins Unendliche theilbar. Bewegung ist stetige Ortsänderung. — Jede stetig wirkende Kraft ist in ihrer einmaligen Wirkung unendlich klein, weil sie sonst in einer endlichen Zeit eine unendlich grosse Geschwindigkeit erzeugen würde. Das Differential der Wirkung einer stetigen Kraft heisst Druck. Jeder Druck (Spannung, Zug, Streben) ist, mit einem Stosse verglichen, eine unendlich kleine Grösse der Bewegung, während verschiedene Drucke jedes bestimmte Verhältniss zu einander haben können. — Die Aenderungen in der Natur erfolgen stetig. (Siehe §. 7.)

Demnach existiren die unendlich kleinen Grössen in der Natur, und sind nicht ein blosses von den Mathematikern erdachtes Hülfsmittel.

§. 30.

Rechnung mit dem Unendlichkleinen.

Die Form des Unendlichen, d. i. seine Entstehung aus einem veränderlichen Ausdruck, ist der Grund, dass damit gerechnet werden kann. — Die unendlich kleinen Grössen sind nur im Verhältniss zu einander bestimmt. — Das Verhältniss $\frac{0}{0}$ hat im Allgemeinen einen unbestimmten Werth, in jedem besonderen Falle aber, je nach der bestimmten Form des Unendlichen einen bestimmten Werth.

Z. B. Ein Dreieck kann ins Unendliche kleiner werden, doch kann man das Verhältniss der unendlich kleinen Seiten bestimmt angeben, sobald man die Form des Dreiecks kennt.

Das Verhältniss zweier unendlich kleinen Grössen lässt sich nur dann bestimmen, wenn sie von einander oder beide von derselben Veränderlichen abhängen; sonst bleibt das Verhältniss unbestimmt.

Rückblickend auf §. 8 und §. 9 haben wir den folgenden Satz: Die unendlich kleinen Grössen verschwinden gegen die endlichen, und allgemein: die höheren Ordnungen des unendlich Kleinen verschwinden gegen die niederen.

Damit hängt zusammen, dass man näherungsweise die Producte und Potenzen sehr kleiner Grössen (ihrer Kleinheit wegen) vernachlässigen kann. Dies Verfahren gebraucht man sehr häufig bei Näherungs-Rechnungen. Dadurch kommen Gleichungen auf den ersten Grad herab. Genauer verfährt man, wenn man noch die zweiten Potenzen beibehält, und nur die höheren ausser Acht lässt; u. s. w.

Z. B. Es seien Grössen x, y, z, ... aus Gleichungen von höheren Graden zu bestimmen. Hat man dafür auf irgend eine Art die Näherungswerthe p, q, r, ... gefunden, so ist $x = p + \alpha$, $y = q + \beta$, $z = r + \gamma$, ... wo α, β, γ nur sehr kleine Grössen sein werden, deren höhere Potenzen man füglich vernachlässigen kann. Setzt man diese Werthe von x, y, z in die gegebenen Gleichungeu, und verwirft alle Potenzen von α, β, γ, welche die erste übersteigen, so bekommt man für α, β, γ Gleichungen des ersten Grades, wodurch man p, q, r verbessert.

§. 31.

Gleichungen zwischen unendlich kleinen Grössen.

Zufolge dem Vorhergehenden hat man den praktisch bequemen und daher wichtigen Satz: Wenn man in einer Gleichung zwischen Unendlich-Kleinen verschiedener Ordnungen alle Glieder der niedrigsten Ordnung allein behält, alle Glieder der höheren Ordnungen aber weglässt, so bleibt die Gleichung richtig.

Hat man es also mit Gleichungen zwischen Unendlich-Kleinen zu thun, so kann man schon während des Aufbaues der Gleichungen alle Glieder weglassen, welche das Unendlich-Kleine in einer höheren Ordnung enthalten würden, als diejenige ist, welche in der Gleichung bereits vorkommt. Dadurch wird der Aufbau der Gleichungen ungemein erleichtert.

Es kann sich aber bei diesem Verfahren treffen, dass die so entstehende Gleichung identisch wird, d. h. dass die Unendlich-Kleinen der niedrigsten Ordnung alle sich aufheben, so dass sie gar nicht erscheinen, das Resultat also zwar richtig ist, aber dem Zwecke nicht mehr entspricht. In diesem Falle muss man alle Glieder der nächst höheren Ordnung des Unendlich-Kleinen in die Gleichung mitaufnehmen und so eine neue Gleichung bilden, welche das Verlangte leistet; u. s. f.

Erstes Beispiel. In der Gleichung zwischen den drei Seiten eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks

$$\cos a = \cos b \cos c$$

oder

$$\left(1 - \frac{a^2}{2} + \ldots\right) = \left(1 - \frac{b^2}{2} + \ldots\right)\left(1 - \frac{c^2}{2} + \ldots\right)$$

wo a die Hypotenuse bedeutet, setze man a, b, c unendlich klein. Wollte man nun das unendlich Kleine gegen das erste Glied in jeder Reihe weglassen, so entstände die identische also unnütze Gleichung $1 = 1$. Deshalb muss man das folgende Glied beibehalten, und lässt man gegen dieses die übrigen weg, so erhält man

$$a^2 = b^2 + c^2$$

als Gleichung zwischen den drei Seiten des ebenen rechtwinkligen Dreiecks.

Zweites Beispiel. Man will den von zwei nächsten Tangenten (oder Normalen) einer ebenen Curve gebildeten unendlich kleinen Winkel w ausdrücken. Wenn a und b die Cosinus der Winkel der ersten Tangente mit den rechtwinkligen Axen, und a_1, b_1 dieselben Winkel der zweiten Tangente sind, so ist

$$\sin w^2 = 1 - (aa_1 + bb_1)^2$$

und nach der Taylorschen Reihe

$$a_1 = a + da + \frac{1}{2} d^2a + \ldots$$

$$b_1 = b + db + \frac{1}{2} d^2b + \ldots$$

Substituirt man diese Werthe in $\sin w^2$, und berücksichtigt die Gleichung $a^2 + b^2 = 1$ und ihr Differential $ada + bdb = o$; so sieht man, dass die endlichen Grössen und die unendlich kleinen der ersten Ordnung sich aufheben, so dass man, wenn die unendlich kleinen Grössen der höheren Ordnungen als der zweiten vernachlässigt werden, erhält

$$\sin w^2 = -(ad^2a + bd^2b)$$

Wir wiederholen nochmals den wichtigen Hauptsatz: In einer Gleichung zwischen Differentialen müssen alle Glieder gleiche Höhe der Potenzen ihrer Differentialgrössen zeigen, so dass alle Glieder gleichen Ranges sind, indem die höheren Potenzen immer gegen die niedrigeren verschwinden. — In diesem Vortheile der Rechnung liegt das Eigenthümliche der höheren Analysis.

Es sei noch folgendes Beispiel erwähnt: Die mathematische Physik hat das Gesetz der Wärmebewegung in einer dünnen Stange zu erforschen. Zertheilt man die Stange durch Querschnitte in unendlich kleine Elemente, und betrachtet die Wechselwirkung dreier nächsten Elemente, indem man dabei voraussetzt, dass das mittlere Element nur vom nächstvorhergehenden Wärme empfängt, und nur dem nächstfolgenden Elemente davon mittheilt, so erhält man für die Wärmebewegung eine Differentialgleichung, in welcher zwei unendlich kleine Grössen von verschiedenen Ordnungen zur Vergleichung kommen, was gegen den Geist der Differentialrechnung ist. Dieses Missverhältniss lässt sich nur durch die Annahme beseitigen (wie Laplace bemerkt hat), dass im Stabe die Wirkung eines Elementes sich nicht blos auf die berührenden Elemente, sondern auch auf die benachbarten zu beiden Seiten in einer kleinen Distanz erstreckt (so dass also im Innern des Körpers auch eine Wärmestrahlung stattfindet). Dann wird die Gleichung homogen, und die Principien der Differentialrechnung sind gewahrt. — So hilft der Calcul den Physiker auf den richtigen Weg führen.

II. Differenzirung der entwickelten Functionen.

§. 32.

Differential einer Function.

Wenn in einer beliebigen Function $f(x)$ die Variable x um Δx sich ändert, so ist die entsprechende Aenderung der Function:

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Nun lässt sich $f(x + \Delta x)$ in eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von Δx entwickeln, so dass

$$f(x + \Delta x) = f(x) + p\Delta x + q\Delta x^2 + r\Delta x^3 + \ldots,$$

wobei p, q, r, ... kein Δx mehr enthalten. Also hat man

$$\Delta f(x) = p\Delta x + q\Delta x^2 + r\Delta x^3 + \ldots,$$

wo im Allgemeinen p, q, r, ... endliche Functionen von x sind.

Wird hier Δx unendlich klein, was man durch dx bezeichnet (d. h. ändert sich x stetig), so wird im Allgemeinen auch $\Delta f(x)$ unendlich klein, was man durch $df(x)$ bezeichnet (d. h. es ändert sich $f(x)$ stetig mit x), und diese unendlich kleinen Aenderungen werden (nicht mehr Differenzen, sondern) Differentiale genannt. Man schreibt

$$df(x) = f(x + dx) - f(x)$$

Entwickelt man in eine Reihe, so verschwinden hier die höheren Potenzen von dx gegen die niederen; oder mit andern Worten: für das unendlich kleine dx nähert sich die Reihe ins Unendliche ihrem ersten Gliede. Das Resultat ist

$$df(x) = p\,dx, \text{ oder } \frac{df(x)}{dx} = p$$

Bezeichnet man die Function mit y, so hat man $\frac{dy}{dx} = p$.

Es ist $\frac{dy}{dx}$ die Grenze, welcher sich das Verhältniss $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ohne Ende nähert, während Δx sich der Null unendlich nähert.

Nur bei einer Function des ersten Grades ist immer $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ gleich $\frac{dy}{dx}$, aber bei allen anderen Functionen ist nur die Grenze von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ gleich $\frac{dy}{dx}$.

Der Quotient $\frac{dy}{dx}$ heisst Differentialquotient der Function y, und ist im Allgemeinen eine bestimmte endliche Function von x.

Nur für besondere Werthe von x kann der Differentialquotient Null oder ausnahmsweise Unendlich werden.

Eine Function y differenziren heisst: ihr Differential dy entwickeln.

§. 33.

Differenzirung der Functionen von Functionen.

Die Functionen von Functionen oder die mittelbaren Functionen sind zusammengesetzte Functionen.

Es sei $y = f(v)$ und $v = \varphi(x)$. Hier kann man $\frac{dy}{dx}$ finden, ohne erst v zu eliminiren. Nämlich, wenn Δx, Δv, Δy die gleichzeitigen Zuwachse der Veränderlichen bezeichnen, so besteht offenbar die Relation

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

und nach Uebergang auf die Grenzen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

Wenn gegeben wäre y als Function von u, wo u eine Function von v, und v eine Function von x, so würde man nach der vorhergehenden Regel zunächst finden $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$; aber nach derselben Regel ist $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx}$. Folglich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx}$$

U. s. w.

§. 34.

Differenzirung von Functionen mehrerer (unabhängigen oder abhängigen) Variablen.

Das Differential einer Function mehrerer veränderlichen Grössen ist die unendlich kleine Aenderung, welche die Function dadurch erleidet, dass x und y gleichzeitig um dx und dy sich ändern, oder mit andern Worten: die Grenze, welcher sich die totale Differenz der Function bei dem unendlichen Abnehmen der Differenzen der veränderlichen Grössen unendlich nähert. Wenn man in einer Function mehrerer Veränderlichen nur Eine der veränderlichen Grössen sich ändern lässt, während man alle übrigen Veränderlichen als constant betrachtet, so entsteht ein partielles Differential. Um eine bequeme Bezeichnung zu haben, wollen wir festsetzen, dass unter du,

wenn u eine Function mehrerer veränderlicher Grössen x, y, z, ... ist, stets das vollständige oder **totale** Differential von u in Bezug auf die Veränderlichkeit sämmtlicher variabler Grössen x, y, z, ... verstanden werde; hingegen soll ein Differentialquotient, wie $\frac{du}{dx}$, immer den **partiellen** Differentialquotienten ausdrücken, welcher sich ergiebt, wenn in der Function u blos x in $x+dx$ übergeht, und die übrigen Grössen y, z, ... ungeändert bleiben; so dass es, sobald mehrere veränderliche Grössen in Betracht kommen, nicht erlaubt ist $\frac{du}{dx}dx = du$ zu setzen, weil jetzt $\frac{du}{dx}dx$ blos das in Bezug auf x genommene partielle Differential von u vorstellt (welches man auch kürzer durch $d_x u$ bezeichnen kann).

Einige Analysten bezeichnen die partiellen Differentialquotienten durch Umklammern, was aber gewöhnlich überflüssig ist.

Das totale Differential einer Function mehrerer Veränderlichen ist der Summe der partiellen Differentiale gleich, mögen nun die Veränderlichen von einander unabhängig sein oder nicht.

Um diesen wichtigen Satz (der nur bei einer ganzen Function des ersten Grades auch für beliebige Differenzen gilt) zu beweisen, betrachten wir z. B. eine Function dreier veränderlicher Grössen

$$u = f(x, y, z)$$

Diese giebt uns

$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z)$$

was sich auf die Form

$$\begin{aligned}\Delta u = & f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z) \\ & + f(x+\Delta x, y+\Delta y, z) - f(x+\Delta x, y, z) \\ & + f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x+\Delta x, y+\Delta y, z)\end{aligned}$$

bringen lässt, das ist

$$\Delta u = \Delta_x f(x, y, z) + \Delta_y f(x+\Delta x, y, z) + \Delta_z f(x+\Delta x, y+\Delta y, z)$$

Lässt man nun Δx, Δy, Δz unendlich abnehmen, so nähern sich die Functionen $f(x+\Delta x, y, z)$ und $f(x+\Delta x, y+\Delta y, z)$ ohne Ende der Function u, und die obige Gleichung verwandelt sich in

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz$$

oder kurz geschrieben

$$du = d_x u + d_y u + d_z u$$

Auf ähnliche Art wird auch für Functionen mehrerer veränderlicher Grössen der erwähnte Satz dargethan: Das totale Differential

einer Function, zufolge der gleichzeitigen Aenderungen der Variablen, ist die Summe der partiellen Differentiale, welche durch die separate Aenderung jeder Variablen (während alle übrigen constant) successiv entstehen würden. — Dadurch kommt die Differenzirung von Functionen mehrerer Veränderlichen zurück auf den einfachen Fall.

Da dieser Satz allgemein gilt, mögen die der Function zum Grunde liegenden Grössen von einander unabhängig sein, oder in was immer für einem Zusammenhange stehen; so erhält man überhaupt das Differential einer zusammengesetzten Function, wenn man sie auf irgend eine Art in veränderliche Bestandtheile zerlegt (diese mögen nun Summanden oder Factoren oder Exponenten u. s. w. sein), und die partiellen Differentiale der Function addirt, zu denen man gelangt, indem man successiv jeden dieser Bestandtheile für sich allein als veränderlich betrachtet.

§. 35.

Princip der Summirung sehr kleiner Veränderungen.

Aus dem Vorigen ergiebt sich die folgende Näherungsregel: Wenn eine Function von Grössen abhängt, welche sehr kleine positive oder negative Veränderungen erfahren, so ist die Totaländerung der Function nahezu gleich der algebraischen Summe der Veränderungen, welche diese Function in ihrem Werthe würde erfahren haben, wenn sich jede der Grössen, wovon sie abhängt, allein geändert hätte. (Dabei werden die Producte und höheren Potenzen der Aenderungen vernachlässigt). Weil auf diesen Satz die Erklärung wichtiger Erscheinungen in Mechanik und Physik sich gründet, auch derselbe die näherungsweise Auflösung schwieriger Probleme möglich macht, so könnte man ihn durch einen besonderen Namen auszeichnen, etwa das Gesetz der Summirung (Coexistenz) kleiner Veränderungen nennen.

Wenn mehrere gegenseitig influirende Ursachen auf ein System gleichzeitig einwirken, aber ihre Wirkungen nur sehr klein sind, so ist das Resultat nahe eben so, als wenn jede Wirkung ungestört von den anderen bleibt, und sich alle diese Wirkungen summiren.

Hierauf beruht z. B. der Genuss eines Concertes, indem wir die Töne, welche von verschiedenen Instrumenten in derselben Zeit zu unseren Ohren gelangen, ungeachtet ihrer Gleichzeitigkeit, deutlich und ohne Verwirrung wahrnehmen, jeden von dem andern abgesondert und ohne dass sie sich stören.

§. 36.

Differentiale der einfachen Functionen.

Es sind nun die einfachen Functionen zu differenziren.

Das Differential einer veränderlichen Summe ist gleich der Summe aus den Differentialen der einzelnen Glieder; dabei ist das Differential einer constanten Grösse gleich Null.

Ein constanter Factor lässt sich gleich vor das Differentialzeichen setzen.

Diese drei Sätze gelten überhaupt von beliebigen Differenzen, auch wenn sie nicht unendlich klein sind.

Für ein veränderliches Product ist

$$d(uv) = udv + vdu = uv\left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v}\right)$$

$$d(uvw) = vwdu + uwdv + uvdw = uvw\left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w}\right)$$

u. s. w.

Für einen veränderlichen Bruch hat man

$$d\frac{u}{v} = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

Nämlich es sei $y = \frac{u}{v}$, also $yv = u$, demnach $ydv + vdy = du$, also $dy = \frac{du}{v} - \frac{udv}{v^2}$. Setzt man die folgende Regel voraus, so kann man auch so verfahren:

$$d\frac{u}{v} = \frac{du}{v} + ud\frac{1}{v} = \frac{du}{v} - \frac{udv}{v^2} = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

Für eine Potenz mit veränderlicher Basis ist

$$d(x^n) = (x + dx)^n - x^n = nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}dx^2 + \ldots$$
$$= nx^{n-1}dx$$

Für eine Potenz mit veränderlichem Exponenten ist

$$d(a^x) = a^{x+dx} - a^x = a^x(a^{dx} - 1)$$
$$= a^x\left(la.dx + \frac{la^2}{2}dx^2 + \ldots\right) = a^x la.dx$$

Wegen $le = 1$ hat man insbesondere

$$d(e^x) = e^x dx$$

Also ist der Differentialquotient der Function $y = e^x$ gleich der Function selbst. Diese sehr merkwürdige und charakteristische Eigenschaft

der Exponentialfunction ist der Grund, weshalb diese Function e^x und e selbst eine so wichtige Rolle spielt. Der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx}=y$ entspricht die Function $y=e^x$

Wenn bei einer Potenz sowohl Basis als Exponent veränderlich, so hat man

$$d(u^v)=vu^{v-1}\,du+u^v lu\,dv=u^v\left(\frac{v}{u}du+lu.dv\right)$$

Für einen veränderlichen Logarithmus ist

$$d\log y=\log(y+dy)-\log y=\log\left(1+\frac{dy}{y}\right)$$
$$=M\left(\frac{dy}{y}-\frac{1}{2}\frac{dy^2}{y^2}+\ldots\right)=M\frac{dy}{y}$$

also für natürliche Logarithmen

$$dly=\frac{dy}{y}$$

Die hier sich ergebende Formel

$$dy=ydly$$

lässt sich oft mit Vortheil anwenden.

Uebrigens ist die Gleichung $dy=ydly$ dieselbe wie $d(e^x)=e^x dx$

Für die Kreisfunctionen gilt:

$$d\sin x=\sin(x+dx)-\sin x=\sin x\cos dx+\sin dx\cos x-\sin x$$
$$=\sin x\left(1-\frac{dx^2}{2}+\ldots\right)+\cos x\left(dx-\frac{dx^3}{2.3}+\ldots\right)-\sin x$$
$$=\cos x dx$$

$$d\tang x=d\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos x d\sin x-\sin x d\cos x}{\cos x^2}$$
$$=\frac{(\cos x^2+\sin x^2)\,dx}{\cos x^2}=\frac{dx}{\cos x^2}$$

$$d\sec x=d\frac{1}{\cos x}=\frac{-d\cos x}{\cos x^2}=\frac{\sin x dx}{\cos x^2}$$
$$=\sec x\tang x dx$$

Setzt man in den drei letzten Formeln $\frac{\pi}{2}-x$ statt x, so erhält man die Differentiale von $\cos x$, $\cot x=\frac{1}{\tang x}$ und $\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}$.

Es sind noch die Differentiale der inversen Kreisfunctionen (oder Bogen) übrig:

Nach dem Vorigen ist $\cos x dx = d\sin x$, oder $dx = \frac{d\sin x}{\sqrt{1-\sin x^2}}$; setzt man hier $\sin x = y$, also $x = \text{arc}\sin y$, so erhält man

$$d\,\text{arc}\sin y = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

Auf ähnlichem Wege erhält man die Differentiale von arc tang y und arc sec y. Da ferner

$$\text{arc}\cos y = \frac{\pi}{2} - \text{arc}\sin y$$

$$\text{arc}\cot y = \frac{\pi}{2} - \text{arc tang}\, y$$

$$\text{arc cosec}\, y = \frac{\pi}{2} - \text{arc sec}\, y$$

so folgt, dass die Differentiale von arc cos y, arc cot y und arc cosec y nur durch das Vorzeichen sich von den Differentialen der arc sin y, arc tang y und arc sec y unterscheiden.

Alle diese Formeln gelten allgemein, es mögen die Variablen unabhängig oder abhängig sein.

Anmerkung. Auch hier zeigt sich, übereinstimmend mit §. 23, die Analogie zwischen den logarithmischen und Kreisfunctionen. Nämlich

es ist $d\,\text{arc}\sin y = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$

und $dl\,(y+\sqrt{1+y^2} = \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}$

Setzt man in der einen Formel $y\sqrt{-1}$ für y, so entsteht daraus die andere, nur mit dem Factor $\sqrt{-1}$.

Ferner ist $d\,\text{arc tang}\, y = \frac{dy}{1+y^2}$

und $dl\,\frac{1+y}{1-y} = \frac{2dy}{1-y^2}$

Setzt man in der einen Formel $y\sqrt{-1}$ für y, so unterscheidet sie sich von der andern nur durch einen imaginären Factor.

Wir geben noch eine Zusammenstellung der Fundamentalformeln für das Differenziren der Functionen:

$$d(a+u+v-w+\ldots) = du + dv - dw + \ldots;\quad da = 0$$

$$d(au) = a\,du$$

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

$$d\frac{u}{v} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

$$d(y^n) = ny^{n-1}dy$$

$$d(a^y) = a^y \, la\,dy; \quad d(e^y) = e^y dy$$

$$d\,log\,y = M\frac{dy}{y}; \quad dly = \frac{dy}{y}$$

$$d\sin y = \cos y\,dy$$

$$d\cos y = -\sin y\,dy$$

$$d\,tang\,y = \frac{dy}{\cos y^2}$$

$$d\cot y = -\frac{dy}{\sin y^2}$$

$$d\sec y = \sec y\,tang\,y\,dy$$

$$d\,cosec\,y = -\,cosec\,y\cot y\,dy$$

$$d\,arc\sin y = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = -d\,arc\cos y$$

$$d\,arc\,tang\,y = \frac{dy}{1+y^2} = -d\,arc\cot y$$

$$d\,arc\sec y = \frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}} = -d\,arc\,cosec\,y$$

Da aus den einfachen Functionen die übrigen zusammengesetzt sind, so kann man mittelst der Differentialformeln für jene auch alle übrigen differenziren.

§. 37.

Differenzirung zusammengesetzter Functionen.

Es sei

$$y = f(u, v, w, \ldots)$$

und u, v, w selbst wieder Functionen von x, also y eine zusammengesetzte Function von x. Dann hat man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx} + \frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx} + \ldots$$

oder

$$dy = \frac{dy}{du}du + \frac{dy}{dv}dv + \frac{dy}{dw}dw + \ldots$$

§. 38.

Höhere Differentiale der Functionen Einer Veränderlichen.

Da das Differential einer Function im Allgemeinen ebenfalls eine Function derselben Veränderlichen ist, so kann man das Differential

einer Function wieder differenziren u. s. w., und erhält dadurch die *höheren Differentiale* der Function.

Die höheren Differentiale kann man auch als höhere Differenzen, die unendlich abnehmen, betrachten. Nämlich setzt man in $y = f(x)$ statt x nach einander die Werthe $x, x_1, x_2, x_3, \ldots$, und es erhält dafür y die Werthe $y, y_1, y_2, y_3, \ldots$, so schreibt man

$$\begin{array}{l|l|l|l}
y & & & \\
 & \Delta y = y_1 - y & & \\
y_1 & & \Delta^2 y = \Delta y_1 - \Delta y & \\
 & \Delta y_1 = y_2 - y_1 & & \Delta^3 y = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y \\
y_2 & & \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 & \\
 & \Delta y_2 = y_3 - y_2 & & \\
y_3 & & &
\end{array}$$

u. s. w.

$$\text{Z. B. } \Delta^2 y = \Delta\Delta y = \Delta(y_1 - y) = (y_2 - y_1) - (y_1 - y)$$

u. s. w.

Nehmen nun die Differenzen von x unendlich ab, so findet dies auch bei den Differenzen von y statt, so dass die Differenzen in die Differentiale übergehen. — Demnach hängt das n^{te} Differential des y von der Vergleichung von $n + 1$ auf einander folgenden Werthen von y ab.

Beim wiederholten Differenziren hat man das Differential der unabhängigen Variablen als constant zu betrachten (d. h. ihre Veränderung als gleichförmig), denn nur das Differential einer abhängig Veränderlichen kann selbst wieder veränderlich sein.

Das Differential der Zeit ist seiner Natur nach constant, d. h. die Aenderungen der Zeit sind als constant zu betrachten, weil die Zeit nothwendig *gleichförmig* verfliesst.

Es sei $y = f(x)$ und x die unabhängig Veränderliche, also dx constant. Dann ist $dy = p\,dx$, wo p im Allgemeinen wieder eine Function von x, und es sei $dp = q\,dx$, wo q im Allgemeinen wieder irgend eine Function von x sein wird, also wieder $dq = r\,dx$, wobei abermals r eine gewisse Function von x ist, u. s. w. Also haben die auf einander folgenden Differentiale von y im Allgemeinen die Form

$$\begin{aligned} dy &= p\,dx \\ ddy = d^2y &= q\,dx^2 \\ dddy = d^3y &= r\,dx^3 \end{aligned}$$

u. s. w.

wo die auf einander folgenden Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = p, \frac{d^2y}{dx^2} = q, \frac{d^3y}{dx^3} = r, \ldots$$

im Allgemeinen gewisse Functionen von x sind.

Jedes höhere Differential verschwindet gegen die niedrigern.

Man bezeichnet die auf einander folgenden Differentialquotienten einer Function $f(x)$ oft kurz durch $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, u. s. w.

Es folgen noch einige Bemerkungen über höhere Differentiale gewisser Functionen von x, wobei dx als constant betrachtet wird:

Wenn y eine ganze rationale Function des n^{ten} Grades von x ist, so wird das n^{te} Differential von y constant, also alle folgenden gleich Null. Jede andere Function lässt sich wiederholt ohne Ende fort differenziren, ohne dass irgend ein Differential constant wird.

Die Function $a.e^x$ ist die einzige, bei welcher der erste, also auch alle folgenden Differentialquotienten gleich der Function sind. (Wenn hier x negativ ist, so wechseln nur die Vorzeichen der Differentialquotienten).

Bei $\sin x$ und $\cos x$ sind die Werthe der Differentialquotienten periodisch wiederkehrend.

Die beiden Functionen $y = \sin x$ und $y = \cos x$ haben die merkwürdige gemeinschaftliche Eigenschaft, welche durch die Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = -y$ ausgedrückt wird.

§. 39.

Höhere Differentiale von Functionen mehrerer Veränderlichen.

Wenn eine Function von mehreren Variablen wiederholt differenzirt wird, so erhält man die höheren Differentiale derselben. Dabei haben wir uns zu erinnern, dass das totale Differential aus der Summe der partiellen Differentiale besteht, und dass die Differentiale der unabhängigen Variablen als constante Factoren zu betrachten sind.

Hier kommen wiederholte partielle Differenzirungen vor. Ist $u = f(x, y, z, \ldots)$ so bedeutet $d_x\, d_y\, d_z \ldots u$, dass man u erst nach x, dann nach y, dann nach z u. s. w. differenziren solle. So wie $\frac{du}{dx}$ den ersten partiellen Differentialquotienten von u nach x bedeutet, so bezeichnet $\frac{d^2u}{dx^2}$ den partiellen Differentialquotienten der zweiten Ordnung, nach x genommen (als wenn x allein veränderlich)

das ist $\frac{d\frac{du}{dx}}{dx}$. In gleicher Weise schreibt man $\frac{d^2u}{dxdy}$ statt $\frac{d\frac{du}{dx}}{dy}$, und $\frac{d^2u}{dydx}$ statt $\frac{d\frac{du}{dy}}{dx}$ u. s. w.

Von den partiellen Differentialen höherer Ordnungen gilt der Satz: Wenn man eine Function wiederholt partiell differenzirt, so ist die Folge der einzelnen Differenzirungen gleichgültig. Dieser Satz gilt ebenso von beliebigen Differenzen Δ, und wird bewiesen, wie folgt:

Im einfachsten Falle sei $u=f(x,y)$. Dann hat man

$$\Delta_x u=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$$

und

$$\Delta_y\Delta_x u=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x, y)+f(x,y)$$

Wegen der Symmetrie dieses letzten Ausdruckes, in Beziehung auf x und y, muss man die Relation

$$\Delta_y\Delta_x u=\Delta_x\Delta_y u$$

haben, folglich, wenn man zur Grenze (d. h. von Differenzen zu Differentialen) übergeht

$$d_y\, d_x u=d_x\, d_y u$$

und

$$\frac{d^2u}{dydx}=\frac{d^2u}{dxdy}$$

Aus der Gleichung $d_y d_x u=d_x d_y u$ folgt ferner, dass man in einem Ausdrucke von der Form $d_x d_y d_z \dots u$ irgend zwei auf einander folgende Indices mit einander vertauschen kann. Wiederholt man dies Vertauschen, so kann man auf alle möglichen Arten die Ordnung der Differenzirungen permutiren, ohne an dem Endresultate etwas zu ändern. Z. B. bei kurzer Bezeichnung hat man

$$d^{m+n}_{x,y}u=d^{n+m}_{y,x}u$$

$$\text{also}\ \frac{d^{m+n}u}{dx^m\,dy^n}=\frac{d^{n+m}u}{dy^n\,dx^m}$$

und ebenso bei mehr Veränderlichen.

Bei dieser Gelegenheit bemerken wir, dass jede willkürliche Function von der Summe $x+y$ zweier Grössen immer denselben Differentialquotienten giebt, welche von den beiden Grössen x und y man auch als die einzige Veränderliche betrachten mag; dasselbe gilt auch noch für die höheren Differentialquotienten; d. h. es ist

$$\frac{df(x+y)}{dx}=\frac{df(x+y)}{dy};\ \frac{d^2f(x+y)}{dx^2}=\frac{d^2f(x+y)}{dy^2};\ \text{u. s. w.}$$

$$\text{allgemein}\ \frac{d^nf(x+y)}{dx^n}=\frac{d^nf(x+y)}{dy^n}.$$

Denn nach der Regel für die Differenzirung der Functionen von Functionen hat man

$$\frac{df(x+y)}{dx}=f'(x+y)\,\frac{d(x+y)}{dx}=f'(x+y)$$

und

$$\frac{df(x+y)}{dy}=f'(x+y)\,\frac{d(x+y)}{dy}=f'(x+y)$$

Ferner ist

$$\frac{d^2f(x+y)}{dx^2}=\frac{df'(x+y)}{dx}=\frac{df'(x+y)}{dy}=\frac{d^2f(x+y)}{dy^2}$$

u. s. w.

III. Differenzirung der unentwickelten Functionen.

§. 40.

Differenzirung einer Gleichung.

Bisher haben wir nur entwickelte Functionen betrachtet. Uebrig ist noch die Differenzirung der unentwickelten Functionen oder der Gleichungen; diese kann geschehen, ohne erst die Function (durch Auflösung der Gleichung) zu entwickeln, was bekanntlich nicht immer auszuführen ist.

Es sei zwischen der beliebigen Anzahl von veränderlichen Grössen x, y, z, ... die Gleichung

$$u=f(x,y,z,\ldots)=0$$

gegeben, wo irgend eine der Grössen x, y, z als Function der übrigen betrachtet werden kann. Bezeichnen nun $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$ die zusammengehörigen Differenzen, um die sich x, y, z, ... ändern, so besteht auch die Gleichung

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots)=0$$

Zieht man die erste Gleichung von der zweiten ab, so erhält man

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)-f(x,y,z)=0$$

das ist

$$\Delta u=0$$

was für beliebige Differenzen, also auch für Differentiale gilt. Mithin aus der Gleichung

$$u=0$$

folgt immer die Gleichung

$$du=0$$

mag dies Differential total oder partiell sein. Aus der letzten Gleichung lässt sich nun das Differential der als Function betrachteten Veränderlichen bestimmen.

Wiederholt man diese Schlüsse, so findet man

$$d^2u=0, d^3u=0, d^4u=0, \text{ u. s. w.}$$

Aus diesen Differentialgleichungen der höheren Ordnungen findet man die höheren Differentiale der als abhängig betrachteten Veränderlichen.

Z. B. Zwischen x und y sei die Gleichung

$$f(x, y)=0$$

gegeben. Dann erhält man nach dem Vorigen die Differentialgleichung der ersten Ordnung

$$\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy=0$$

oder auch, wenn man y als Function von x betrachtet,

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{dx}=0$$

woraus man dy oder $\frac{dy}{dx}$ bestimmen kann. — Differenzirt man zum zweiten Male, indem man beachtet, dass $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$ die Veränderlichen x und y enthalten, und dass y als Function von x betrachtet wird, so erhält man die Differentialgleichung der zweiten Ordnung:

$$\frac{d^2f}{dx^2}dx^2+\frac{d^2f}{dxdy}dxdy+\frac{d^2f}{dy^2}dy^2+\frac{df}{dy}d^2y=0$$

oder

$$\frac{d^2f}{dx^2}+2\frac{d^2f}{dxdy}\frac{dy}{dx}+\frac{d^2f}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{df}{dy}\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

Aus dieser Gleichung findet man $\frac{d^2y}{dx^2}$, nachdem man aus der obigen Gleichung $\frac{dy}{dx}$ gefunden hat.

Wenn zwischen den drei veränderlichen Grössen x, y, z die eine Gleichung

$$f(x, y, z)=0$$

gegeben ist, so kann man z als Function von x und y betrachten. Dann sind aber x, y und auch dx, dy völlig willkürliche von einander unabhängige Grössen. Nach dem Früheren ist nun

$$\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy+\frac{df}{dz}dz=0$$

Daraus kann man dz bestimmen. Will man aber die partiellen Differentiale von z ausdrücken, so verfährt man wie folgt: Weil, indem z eine Function von x und y,

$$dz=\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy$$

ist; so ist auch

$$\left(\frac{df}{dx}+\frac{df}{dz}\frac{dz}{dx}\right)dx+\left(\frac{df}{dy}+\frac{df}{dz}\frac{dz}{dy}\right)dy=0$$

und diese Gleichung gilt für jedes ganz beliebige dx und dy, zerfällt also in die beiden abgesondert bestehenden Gleichungen

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dz}\frac{dz}{dx}=0,\ \frac{df}{dy}+\frac{df}{dz}\frac{dz}{dy}=0$$

mittelst welchen die beiden Differentialquotienten $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ gefunden werden können.

§. 41.

Differenzirung gleichzeitiger Gleichungen.

Wenn n Gleichungen zwischen m Variablen gegeben sind, so lassen sich n dieser Variablen als unentwickelte Functionen der übrigen m — n Veränderlichen, welche unabhängig erscheinen, betrachten.

Hat man nun die Gleichungen

$$u=0, v=0, w=0, \ldots$$

so ist auch

$$du=0, dv=0, dw=0, \ldots$$

aus welchen Differentialgleichungen man die Differentiale der Functionen entwickeln kann. — Durch höheres Differenziren der Gleichungen erhält man auch die höheren Differentiale der Functionen.

Beispiel. Hat man zwischen den drei Veränderlichen x, y, z die beiden Gleichungen

$$F(x, y, z)=0$$
$$f(x, y, z)=0$$

so kann man y und z als Functionen von x betrachten. Man erhält nun nach dem Vorigen:

$$\frac{dF}{dx}dx+\frac{dF}{dy}dy+\frac{dF}{dz}dz=0$$

$$\frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy+\frac{df}{dz}dz=0$$

woraus man dy und dz findet. Differenzirt man wieder, indem man beachtet, dass dy und dz nicht constant sind, so erhält man

$$\frac{d^2F}{dx^2}dx^2+\frac{d^2F}{dy^2}dy^2+\frac{d^2F}{dz^2}dz^2+2\frac{d^2F}{dxdy}dxdy+2\frac{d^2F}{dxdz}dxdz$$
$$+2\frac{d^2F}{dydz}dydz+\frac{dF}{dy}d^2y+\frac{dF}{dz}d^2z=0$$

$$\frac{d^2f}{dx^2}dx^2+\frac{d^2f}{dy^2}dy^2+\frac{d^2f}{dz^2}dz^2+2\frac{d^2f}{dxdy}dxdy+2\frac{d^2f}{dxdz}dxdz$$
$$+2\frac{d^2f}{dydz}dydz+\frac{df}{dy}d^2y+\frac{df}{dz}d^2z=0$$

woraus man d^2y und d^2z findet, nachdem dy und dz bekannt sind.

IV. Vertauschung und Wegschaffung von Veränderlichen in Differential-Ausdrücken.

§. 42.

Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen.

Oft will man Differential-Ausdrücke dadurch umformen, dass man, statt der ursprünglich darin enthaltenen unabhängigen Variablen, im Laufe der Rechnung neue unabhängige Variable einführt. Man begreift leicht im Allgemeinen die Wichtigkeit einer solchen Transformation bei den Anwendungen des Infinitesimal-Calculs. Nämlich dieses Verfahren bietet ein neues Hülfsmittel des Calculs, indem es dadurch erlaubt ist, solche unabhängig Variable zu wählen, die am vortheilhaftesten sind, um anfangs die Differentialgleichungen leichter zu bilden, obgleich man später diese Variablen nicht beizubehalten braucht. Z. B. Die wichtigsten Aufgaben der Geometrie lösen sich meist leichter, wenn man von rechtwinkligen Coordinaten ausgeht, und nachher kann man nöthigenfalls zu Polar-Coordinaten übergehen.

Hätte man mit Ausdrücken zu thun, die keine Differentiale enthalten, so würde die Algebra zu diesen Umformungen hinreichen; hier aber, wo Differential-Ausdrücke gegeben sind, hat man noch eigenthümliche Untersuchungen und Regeln für das Uebertragen der Unabhängigkeit veränderlicher Grössen nöthig.

Bei jeder Aufgabe muss man die unabhängig Variablen von den abhängig Variablen unterscheiden, und durchgängig in den Gleichungen festhalten, weil man beim wiederholten Differenziren die Differentiale der unabhängig Variablen als constant betrachtet, während die Differentiale der anderen Variablen veränderlich sind. Man kann indessen mit Hülfe gewisser Umformungen, welche wir jetzt betrachten wollen, im Laufe einer Rechnung neue unabhängig Veränderliche an die Stelle der anfangs gewählten einführen.

Es habe eine vorgelegte Aufgabe zu der Gleichung

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3},\ldots\right)=0$$

geführt, in welcher x als unabhängige Variable und y als Function von x betrachtet worden sei. Man nehme nun an, dass an die Stelle von x eine andere unabhängige Variable t eingeführt werden soll; dies ist so zu verstehen, dass jetzt x und y Functionen von t werden sollen, während jedoch die ursprünglich aufgestellte Abhängigkeit zwischen x und y bestehen bleibt. Die Relation, welche t mit x und

y verbindet, muss gegeben sein; entweder durch eine Gleichung zwischen t und x, wie $\varphi(t, x) = 0$, oder durch eine Gleichung zwischen t und y, wie $\chi(t, y) = 0$, oder durch eine Gleichung zwischen t, x und y, wie $\psi(t, x, y) = 0$. — Nun müssen in der Gleichung $F = 0$ an die Stelle der Differentialquotienten in Bezug auf x andere Differentialquotienten in Bezug auf t gesetzt werden, ohne die Abhängigkeit des y von x zu stören. Zum Behufe der Lösung dieser Aufgabe hat man, da x eine Function von t, und y eine Function von x, die Gleichungen:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} = \frac{d^3y}{dx^3}\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 + 3\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dx}\frac{d^3x}{dt^3}$$

u. s. w.,

welche durch wiederholtes Differenziren nach t hervorgehen. Löst man diese Gleichungen nach $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ auf, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

u. s. w.

Sobald man diese Werthe in die Gleichung $F=0$ substituirt, so wird diese Gleichung x, y und deren Differentialquotienten in Bezug auf t enthalten. Wenn man nun eine Gleichung $\varphi(t, x) = 0$ zwischen t und x hat, so kann man x nebst seinen Differentialquotienten in der Gleichung $F=0$ durch ihre aus der Gleichung $\varphi(t, x) = 0$ nach §. 40 genommenen Werthe ersetzen, so dass die Gleichung $F=0$ nur noch t, y, $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^3y}{dt^3}, \ldots$ enthält. Wenn man dagegen eine Gleichung $\chi(t, y) = 0$ zwischen t und y hat, so kann man ebenso y und seine Differentialquotienten wegbringen, so dass die Gleichung $F=0$ nur noch t, x, $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^3x}{dt^3}, \ldots$ enthält. Endlich wenn eine Gleichung $\psi(t, x, y) = 0$ zwischen allen 3 Variablen gegeben ist, so

kann man nach Gefallen x oder y wegbringen, weil diese Gleichung und ihre successiven Differentiale in Bezug auf t (indem man nämlich x und y als Functionen von t betrachtet) die Werthe von x, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, ... als Functionen von y, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, ... geben, und umgekehrt.

Wenn die Relation zwischen t und den übrigen Variablen in der Gleichung $x=t$ besteht, so hat man $\frac{dx}{dt}=1$, $\frac{d^2x}{dt^2}=0$, $\frac{d^3x}{dt^3}=0$, ..., und die obigen Formeln reduciren sich auf $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d^3y}{dt^3}$, ...

Wenn die in Rede stehende Relation in der Gleichung $y=t$ besteht, so erhält man $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dy}=1$, $\frac{d^2y}{dt^2}=0$, $\frac{d^3y}{dt^3}=0$, ..., und jene Formeln verwandeln sich (indem man y statt t schreibt) in $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}$, u. s. w. Man muss also diese letzteren Ausdrücke an die Stelle von $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... setzen, sobald man in einer Gleichung zwischen x und y, in welcher anfangs x als unabhängige Variable angesehen worden ist, nachher y zur unabhängigen Variablen machen will. Diese Formeln führen unmittelbar zum Ausdrucke der Differentiale der inversen Functionen.

Der Vertauschung der Veränderlichen entspricht im geometrischen Sinne eine Coordinatenverwandlung.

Betrachten wir noch den (z. B. oft bei Coordinatenverwandlung vorkommenden) Fall, wo u eine Function der drei unabhängig Variablen x, y, z ist, welche durch drei andere unabhängig Variable r, φ, ϑ, die mit x, y, z durch drei gegebene Gleichungen verbunden sind, ersetzt werden sollen. Hier handelt es sich darum, durchgängig die partiellen Differentiale von u nach x, y, z, mittelst der partiellen Differentiale nach r, φ, ϑ auszudrücken. Wir betrachten u als Function von ϑ, φ, r, und diese letzteren als Functionen von x, y, z; differenzirt man nun u partiell in Bezug auf x, y, z, so erhält man

$$(\dagger)\begin{cases} \frac{du}{dx}=\frac{du}{d\vartheta}\frac{d\vartheta}{dx}+\frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{du}{dr}\frac{dr}{dx} \\ \frac{du}{dy}=\frac{du}{d\vartheta}\frac{d\vartheta}{dy}+\frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dy}+\frac{du}{dr}\frac{dr}{dy} \\ \frac{du}{dz}=\frac{du}{d\vartheta}\frac{d\vartheta}{dz}+\frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dz}+\frac{du}{dr}\frac{dr}{dz} \end{cases}$$

Nun kann man mittelst der drei Gleichungen zwischen x, y, z, ϑ, φ, r die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{d\vartheta}{dx}, \frac{d\vartheta}{dy}, \frac{d\vartheta}{dz}, \frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}, \frac{dr}{dx}, \frac{dr}{dy}, \frac{dr}{dz}$$

bestimmen, und dann geben die Gleichungen (†) die Werthe der partiellen Differentialquotienten der Function u in Bezug auf x, y, z, mittelst der partiellen Differentialquotienten des u nach ϑ, φ, r. — Differenzirt man die Gleichungen (†) successive nach x, y, z, so würde man die zweiten Differentiale in Bezug auf die unabhängig Variablen des einen Systems, mittelst der zweiten Differentiale in Bezug auf die Variablen des anderen Systemes ausdrücken; und so kann man weiter gehen.

Man nennt solche Umformungen, welche dieser Paragraph betrachtet, das Uebertragen der Unabhängigkeit von einer Veränderlichen (x) auf eine andere (t oder y).

§. 43.

Elimination einer Veränderlichen nebst ihren Differentialquotienten.

Hat man zwei Differential-Gleichungen zwischen x, y, z und den Differentialquotienten von y und z nach x, von irgend einer Ordnung, so kann es wünschenswerth erscheinen, aus diesen beiden Gleichungen eine der Veränderlichen, z. B. y, aber auch alle seine Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ auf einmal zu eliminiren, so dass eine Gleichung entsteht, welche blos noch x, z und Differentialquotienten von z nach x enthält.

Das Eliminiren hier unterscheidet sich von dem Elimiren in der Algebra blos dadurch, dass man hier ausser y auch noch alle seine Differentialquotienten, die in den beiden gegebenen Gleichungen vorkommen, mit wegschaffen muss, dass man also eine grössere Anzahl von Gleichungen braucht, um Alles eliminiren zu können. Diese fehlenden Gleichungen verschafft man sich aber dadurch, dass man jede der beiden gegebenen Differential-Gleichungen noch wiederholt differenzirt. Dadurch erhält man immer neue und neue Paare von Gleichungen, während in jedem neuen Paar ein einziger neuer höherer Differentialquotient von y nach x eingeht. Auf diese Weise hat man bald mehr Gleichungen als zu eliminirende Ausdrücke, und dem Eliminiren stehen also keine andere Hindernisse mehr entgegen, als diejenigen, welche die Algebra selbst darbietet.

Leicht begreift man, wie das Verfahren auf die Elimination von Veränderlichen aus mehr als zwei gegebenen Gleichungen ausgedehnt werden kann.

V. Näherungs-Rechnungen.

§. 44.

Allgemeines.

Die Gleichungen zwischen Differentialen können näherungsweise als Gleichungen zwischen Differenzen angesehen werden, im Falle die Differenzen sehr klein sind (so dass man ihre Producte und höheren Potenzen vernachlässigen kann), welches Verfahren um so genauer ist, je näher die Differenzen der Null kommen. Dieser für die Praxis sehr wichtige Satz gestattet mannigfaltige Anwendungen.

§. 45.

Fehlerrechnung.

In der angewandten Mathematik sind Fehler unvermeidlich, weil die Grössen, welche durch Beobachtung gegeben sind, wegen Unvollkommenheit der Instrumente und unserer Sinne nie vollkommen genau gemessen werden können. Es ist deshalb, wenn man die Grenzen der Fehler in den Datis schätzen kann, sehr wichtig, die daraus entspringenden Fehler in den Resultaten zu bestimmen. Da nun bei allen guten Messungen die Fehler der gemessenen Grössen nur sehr klein sind, so kann man näherungsweise an die Stelle der Fehler als Differenzen die Differentiale setzen, indem man die Gleichung zwischen den Fehlern in den gemessenen Grössen und der berechneten Grösse, statt durch die Differenzenrechnung, mit einem hinreichenden Grade der Annäherung durch die Differentialrechnung entwickelt (d. h. die höheren Potenzen und Producte der Fehler vernachlässigt).

Z. B. Die zur Bestimmung eines (ebenen oder sphärischen) Dreiecks gemessenen Stücke sind nie ganz von Fehlern frei, weshalb es nöthig ist, den Einfluss beurtheilen zu können, welchen diese Fehler auf die berechneten Stücke ausüben. Da nun bei guten Beobachtungen die Fehler in den gemessenen Stücken immer der Null sehr nahe kommende Grössen sein werden, so können Differentiale die Stelle der Differenzen vertreten, so dass man die Grundformeln der Fehlerrechnung in der Trigonometrie erhält, wenn man die Grundgleichungen der Trigonometrie differenzirt.

Aus den Gleichungen der ebenen Trigonometrie

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$
$$a \sin B = b \sin A$$
$$A + B + C = \pi$$

erhält man durch Differenziren

$$a\,da = a \cos C\,db + a \cos B\,dc + bc \sin A\,dA$$
$$\sin B\,da - \sin A\,db = b \cos A\,dA - a \cos B\,dB$$
$$dA + dB + dC = 0$$

Ferner aus den Gleichungen der sphärischen Trigonometrie

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$
$$\sin A \sin b = \sin B \sin a$$
$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

erhält man durch Differenziren

$$da = \cos C\,db + \cos B\,dc + \sin c \sin B\,dA$$
$$\sin A \cos b\,db + \cos A \sin b\,dA = \sin B \cos a\,da + \cos B \sin a\,dB$$
$$-dA = \cos c\,dB + \cos b\,dC - \sin b \sin C\,da$$

Nimmt man eins oder zwei der Stücke als unveränderlich an, so sind ihre Differentiale gleich Null zu setzen, wodurch die Gleichungen oft sehr vereinfacht werden.

VI. Rückblick auf die Theorie der Differentialrechnung.

§. 46.

Das Differenziren betrifft entweder die entwickelten oder die unentwickelten Functionen (d. i. Differenzirung der Formeln und der Gleichungen), wovon der erste Fall die Grundlage bildet, auf welchen man den zweiten Fall durch eine allgemeine Regel (§. 40) zurückführt. Dabei differenzirt man entweder Functionen von einer oder von mehreren Variablen, wovon der zweite Fall auf den ersten durch eine einfache Regel (§. 34) zurückgebracht wird. So kommt der ganze Differential-Calcul auf die Differenzirung der entwickelten Functionen einer einzigen Veränderlichen zurück, welche allein direct geschieht, und wenn diese Functionen zusammengesetzt sind, so führt man ihre Differenzirung auf die der einfachen (nach §. 33) zurück. Ferner die höheren Differentiale entstehen durch wiederholte Bildung des ersten Differentials. Demnach beruht im Grunde das ganze System der Differentialrechnung auf der Differenzirung der einfachen Functionen, so dass das gesammte Differenziren auf die Kenntniss von einem Dutzend Fundamentalformeln in Verbindung mit wenigen allgemeinen Regeln sich reducirt. Man sieht, wie einfach und vollendet die Theorie der Differentialrechnung ist, und eine solche Vollendung zeigt kein anderer Zweig der Analysis.

VII. Taylorsche Reihe.

§. 47.

Taylorsche und Maclaurinsche Reihe für Functionen einer Variablen.

Das nächste Ziel der Differentialrechnung ist die Taylorsche Reihe (oder die Maclaurinsche, denn aus der einen geht sogleich die andere hervor), welche von der grössten Wichtigkeit ist.

Wenn man in einer Function $F(x)$ statt x, $x+h$ setzt, wo h eine beliebige Aenderung von x bedeutet, so erhält man $F(x+h)$, und dieses wird durch die Taylorsche Reihe nach ganzen und positiven Potenzen von h entwickelt, wie folgt:

$$* F(x+h) = F(x) + \frac{dF(x)}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2F(x)}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3F(x)}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots$$

oder mit kürzeren Zeichen:

$$F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x) + \frac{h^3}{1.2.3}F'''(x) + \ldots$$

Man hat diese Reihe auf folgende Art bewiesen: Setzt man

$$F(x+h) = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \ldots$$

und differenzirt wiederholt in Bezug auf h, so erhält man:

$$\frac{dF(x+h)}{dh} = B + 2Ch + 3Dh^2 + \ldots$$

$$\frac{d^2F(x+h)}{dh^2} = 2C + 2.3Dh + \ldots$$

u. s. w.

Nun ist aber bekanntlich (§. 39)

$$\frac{dF(x+h)}{dh} = F'(x+h)$$

$$\frac{d^2F(x+h)}{dh^2} = F''(x+h)$$

u. s. w.

Werden diese Werthe in den vorigen Gleichungen substituirt, und dann $h=0$ gesetzt, so erhält man

$$A = F(x), B = F'(x), C = F''(x), \ldots$$

Später geben wir einen anderen Beweis der Taylorschen Reihe nebst Bestimmung des Restes.

Die Taylorsche Reihe, welche ein ganz allgemeines Theorem der Reihenentwickelung darstellt, ist eine Fundamentalformel der Differentialrechnung, und wird fortwährend in der Analysis angewandt.

Diese Reihe lauft im Allgemeinen ohne Ende fort. Die Anzahl ihrer Glieder ist nur in dem Falle eine endliche, wenn $F(x)$ eine ganze algebraische Function bedeutet, weil dann das n^{te} Differential (wo n den höchsten Expo-

nenten von x in dieser Function bezeichnet) constant wird, also die höheren Differentiale verschwinden.

Wenn man $h = dx$ setzt, so erhält man:

$$f(x+dx) = f(x) + df(x) + \frac{1}{1.2}\, d^2f(x) + \frac{1}{1.2.3}\, d^3f(x) + \ldots$$

Setzt man in der Taylorschen Reihe $x = 0$, und schreibt dann x statt des ganz willkürlichen h, so erhält man die Maclaurinsche Reihe:

$$F(x) = F\binom{x}{0} + \frac{dF\binom{x}{0}}{dx}x + \frac{d^2F\binom{x}{0}}{dx^2}\frac{x^2}{1.2} + \frac{d^3F\binom{x}{0}}{dx^3}\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

oder anders geschrieben

$$F(x) = F(0) + xF'(0) + \frac{x^2}{1.2}F''(0) + \frac{x^3}{1.2.3}F'''(0) + \ldots$$

wo $F(0), F'(0), \ldots$ die Werthe von der Function $F(x)$ und ihren Differentialquotienten, wenn man darin $x = 0$ setzt, bezeichnen.

Man kann auch die Maclaurinsche Reihe, ohne Anwendung der Taylorschen Reihe, sehr leicht durch die Methode der unbestimmten Coefficienten finden. Zu diesem Zwecke setzt man, wenn sich die Function $F(x)$ wirklich in eine Reihe nach ganzen Potenzen von x entwickeln lässt (was der Verlauf der Rechnung zeigen wird)

$$F(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

und bildet, um die unbekannten Constanten $A, B, C, \ldots$ zu bestimmen, durch Differenzirung:

$$F'(x) = B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots$$
$$F''(x) = 2C + 2.3Dx + \ldots$$
$$F'''(x) = 2.3D + \ldots$$

u. s. w.

Setzt man nun hier $x = 0$, so wird

$$A = F(0),\ B = F'(0),\ C = \frac{1}{2}F''(0),\ D = \frac{1}{2.3}F'''(0), \text{ u. s. w.}$$

Die Maclaurinsche Reihe ist ein allgemeiner Ausdruck der Entwickelung einer Function nach ganzen Potenzen der Variablen.

Diese Reihe lauft im Allgemeinen ohne Ende fort, und bricht nur in dem Falle ab, wo die Function eine ganze rationale ist.

Aus der Maclaurinschen Reihe erhält man sogleich wieder die Taylorsche, wenn man $F(x+h)$ als Function von h ansieht und mittelst der Maclaurinschen Reihe nach den Potenzen von h entwickelt.

Man kann auch vermittelst der Taylorschen Reihe $F(x)$ in eine Reihe verwandeln, welche nach Potenzen von $x - \alpha$ fortlauft, wo α irgend eine bestimmte Zahl (auch Null) vorstellt. Setzt man nämlich in der Taylorschen Reihe α statt x, und in der dadurch entstehenden Gleichung (welche kein x mehr hat) wieder $x - \alpha$ statt h, so erhält man

$$F(x) = F(\alpha) + F'(\alpha)\frac{(x-\alpha)}{1} + F''(\alpha)\frac{(x-\alpha)^2}{1.2} + F'''(\alpha)\frac{(x-\alpha)^3}{1.2.3} + \dots$$

wo $F(\alpha)$, $F'(\alpha)$, $F''(\alpha)$, ... die $x = \alpha$ entsprechenden Werthe von $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$, ... bezeichnen. Diese Reihe kann man die allgemeinere Maclaurinsche nennen.

Wir besitzen in der Taylorschen und Maclaurinschen Reihe, was höchst beachtenswerth ist, einen Ausdruck für die Function in ihrer ganzen Ausdehnung genommen, und lediglich durch solche Werthe dieser Function und der unendlichen Reihenfolge ihrer Differentialquotienten bestimmt, welche einem einzigen Werthe von x zugehören. Werden also Werthe einer Function und ihrer sämmtlichen Differentialquotienten nur für einen einzigen Werth der unabhängigen Veränderlichen gegeben, so ist damit im Allgemeinen die Function selbst gegeben. — Uebrigens ist noch das Folgende wohl zu berücksichtigen.

Die Taylorsche sowohl als die Maclaurinsche Reihe muss, wenn sie zur numerischen Berechnung brauchbar sein soll, convergiren, d. h. die Summe von immer mehr Gliedern muss sich immer mehr einer bestimmten Grenze nähern. Man muss den Fehler, welchen man durch Abbrechen der Reihe begeht, schätzen, oder wenigstens zwei Grenzen angeben können, zwischen denen dieser Fehler liegt. Wir werden später (in der Integralrechnung) den Rest der Taylorschen und Maclaurinschen Reihe näher betrachten.

Es giebt Ausnahmefälle, wo für gewisse besondere Werthe der Variablen die Taylorsche Reihe unbrauchbar wird. Nämlich die Brauchbarkeit der Taylorschen Reihe ist an die Bedingung gebunden, dass die Variable x keinen besonderen (singulären) Werth erhalte, für welchen die Function $F(x)$ oder ihre Differentialquotienten $F'(x)$, $F''(x)$, u. s. w. unendlich werden (die Form $\frac{p}{0}$ annehmen). In einem solchen besonderen Falle ist die Reihe unbrauchbar, weil sie unbestimmte Grössen enthält, wodurch angezeigt wird, dass $F(x+h)$ nicht nach ganzen positiven Potenzen von h sich entwickeln lässt.

Gerade aus der allgemeinen Form der Reihe, dadurch dass man die Nenner der einzelnen Coefficienten gleich Null setzt, findet man diese Ausnahmswerthe von x für jede gegebene Function $F(x)$. — Ueberhaupt besteht ein wesentlicher Theil des Nutzens, welchen man aus der Kenntniss irgend einer allgemeinen analytischen Form zieht, darin, dass man aus ihr selbst alle Ausnahmen, welche sie in besonderen Fällen erleiden kann, direct zu finden im Stande ist.

Ebenso kann die Ausnahme stattfinden, dass in der Maclaurinschen Reihe Coefficienten unendlich werden, indem $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$, u. s. w. für $x=0$ die Form $\frac{p}{0}$ annehmen, wodurch an-

gezeigt wird, dass die Function $F(x)$ nicht nach ganzen positiven Potenzen von x entwickelt werden kann. Dann müsste man die Reihe nicht nach den Potenzen von x, sondern nach den Potenzen von $(x-\alpha)$ ordnen; nämlich in der allgemeineren Maclaurinschen Reihe, die nach $(x-\alpha)$ fortschreitet, kann man dem α einen solchen Werth geben, für welchen $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$, ... alle einen bestimmten Werth annehmen, also kein Coefficient der Reihe unendlich wird.

§. 48.

Erweiterung der Taylorschen und Maclaurinschen Reihe für Functionen von mehreren Variablen.

Es wird schon genügen, eine Function von zwei Veränderlichen zu betrachten, nämlich $u=F(x,y)$, wo die Variablen x und y von einander unabhängig sind. Man lässt nun diese Variablen respective die Werthe $x+h$ und $y+k$ annehmen, wo h und k ganz beliebige Incremente sind, und will den geänderten Werth der Function, das ist $F(x+h, y+k)$, nach den Potenzen von h und k entwickeln. Wenn hier $u_I=F(x+h,y)$ und $u_{II}=F(x+h,y+k)$ ist, so hat man nach §. 47:

$$u_I = u+\frac{du}{dx}h+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{2.3}+\dots$$

$$u_{II}=u+\frac{du_I}{dy}k+\frac{d^2u_I}{dy^2}\frac{k^2}{2}+\frac{d^3u_I}{dy^3}\frac{k^3}{2.3}+\dots$$

Nun ist aber

$$\frac{du_I}{dy}=\frac{du}{dy}+\frac{d^2u}{dxdy}h+\frac{d^3u}{dx^2dy}\frac{h^2}{2}+\dots$$

$$\frac{d^2u_I}{dy^2}=\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^3u}{dxdy^2}h+\dots$$

$$\frac{d^3u_I}{dy^3}=\frac{d^3u}{dy^3}+\dots$$

u. s. w.

Substituirt man sowohl diese, als auch den Werth von u_I in die vorige Gleichung von u_{II}, so erhält man die erweiterte Taylorsche Reihe:

$$F(x+h,y+k)=F+\left(\frac{dF}{dx}h+\frac{dF}{dy}k\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2F}{dx^2}h^2+\frac{d^2F}{dxdy}2hk+\frac{d^2F}{dy^2}k^2\right)$$
$$+\frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3F}{dx^3}h^3+\frac{d^3F}{dx^2dy}3h^2k+\frac{d^3F}{dxdy^2}3hk^2+\frac{d^3F}{dy^3}k^3\right)+\dots$$

Man erkennt leicht, wie sich die vorstehende Entwickelung auch auf solche Fälle übertragen lässt, wo die gegebene Function mehr als zwei unabhängige Variable enthält, welche gleichzeitig Zunahmen erhalten sollen. Die auf einander folgenden Glieder der Entwickelung sind immer die vollständigen Differentiale der ersten, zweiten, dritten, u. s. w. Ordnung von der gegebenen Function, in denen man statt des Differentials einer jeden Variablen ihren Zuwachs gesetzt hat, und die sodann respective durch 1, 2, 2.3, u. s. w. dividirt werden.

Z. B. Es ist

$$F(x+g,y+h,z+k)=F+\left(\frac{dF}{dx}g+\frac{dF}{dy}h+\frac{dF}{dz}k\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2F}{dx^2}g^2+\frac{d^2F}{dy^2}h^2+\frac{d^2F}{dz^2}k^2+\frac{d^2F}{dxdy}2gh+\frac{d^2F}{dxdz}2gk+\frac{d^2F}{dydz}2hk\right)+\ldots$$

Die erweiterte Taylorsche Reihe wird unbrauchbar, wenn die Function und ihre partiellen Differentialquotienten für besondere Werthe der Veränderlichen unendlich werden, oder überhaupt unbestimmte Werthe annehmen.

Die vorhergehende Erweiterung der Taylorschen Reihe liefert auch die Entwickelung der Function $F(x, y)$ nach Potenzen von x und y, und damit also eine Erweiterung der Maclaurinschen Reihe. Setzt man nämlich $x=0$ und $y=0$, und schreibt sodann x statt h, und y statt k, so erhält man:

$$F(x,y)=F_0+\left(\frac{dF_0}{dx}x+\frac{dF_0}{dy}y\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2F_0}{dx^2}x^2+\frac{d^2F_0}{dxdy}2xy+\frac{d^2F_0}{dy^2}y^2\right)$$
$$+\frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3F_0}{dx^3}x^3+\frac{d^3F_0}{dx^2dy}3x^2y+\frac{d^3F_0}{dxdy^2}3xy^2+\frac{d^3F_0}{dy^3}y^3\right)+\ldots$$

wo wir durch F_0, $\frac{dF_0}{dx}$, $\frac{dF_0}{dy}$, $\frac{d^2F_0}{dx^2}$, u. s. w. die Werthe vorstellen, welche respective die Functionen F, $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$, $\frac{d^2F}{dx^2}$, u. s. w. annehmen, wenn in ihnen gleichzeitig $x=0$ und $y=0$ gesetzt wird. — Aehnlich würde man verfahren, wenn die Anzahl der unabhängigen Variablen grösser wäre.

Da die Entwickelung von Functionen mit mehreren unabhängig Veränderlichen nach den Potenzen jeder Veränderlichen zu complicirten Formen führt, so entwickelt man oft diese Functionen nur nach den Potenzen einer der Veränderlichen; aber alsdann sind die Coefficienten der Glieder der Reihe nicht mehr Constanten, sondern Functionen aller übrigen Variablen. Man kann daher setzen:

$f(x, y, z \ldots) = f(0, y, z, \ldots) + f'(0, y, z, \ldots)\frac{x}{1} + f''(0, y, z, \ldots)\frac{x^2}{1.2}$ $+ f'''(0, y, z, \ldots)\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$, wo $f', f'', f''', \ldots$ die Differentialquotienten von f in Beziehung auf die Veränderliche x bezeichnen.

VIII. Näherungs-Methoden.

§. 49.

Weglassen höherer Potenzen kleiner Grössen.

Aus dem Gesichtspuncte der Annäherung wird man für ein sehr kleines h näherungsweise und mit steigender Richtigkeit setzen können:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x)$$
$$= f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x)$$
$$= f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3}f'''(x)$$

u. s. w.

was z. B. in folgenden Fällen Anwendung findet.

Von der Gleichung

$$f(x) = 0$$

sei α ein naher Werth für die Wurzel x, und der Fehler $= z$, also $x = \alpha + z$. Nach der Taylorschen Reihe ist nun

$$f(\alpha + z) = f(\alpha) + zf'(\alpha) + \frac{z^2}{2}f''(\alpha) + \ldots = 0,$$

folglich, wenn z so klein ist, dass man annähernd die höheren Potenzen von z gegen die erste vernachlässigen kann, so wird $f(\alpha) + zf'(\alpha) = 0$, und demnach

$$z = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

Dadurch findet man einen noch näheren Werth der Wurzel. Natürlich muss man dabei überzeugt sein, dass in jener Reihe sämmtliche Glieder mit höheren Potenzen von z in Vergleich zu den beiden ersten Gliedern unerheblich sind, und nicht etwa die beiden ersten Glieder wegen $f(\alpha)$ und $f'(\alpha)$ so gering ausfallen, dass die darauf folgenden Glieder von verhältnissmässig bedeutendem, ja selbst überwiegendem Inhalte werden. — Noch schneller würde man dem wahren Werthe der Wurzel sich nähern, wenn man auch das Glied mit

z^2 berücksichtigt, und nur die höhere Potenzen von z enthaltenden Glieder ausser Acht lässt. Dann ist

$$f(\alpha) + zf'(\alpha) + \frac{z^2}{2} f''(\alpha) = 0$$

also
$$z = \frac{-f(\alpha)}{\frac{1}{2} zf''(\alpha) + f'(\alpha)}$$

wo es hinreicht, im Nenner statt z den obigen Werth $= \frac{-f(\alpha)}{f'(\alpha)}$ zu setzen, wodurch man

$$z = \frac{-f(\alpha).f'(\alpha)}{[f'(\alpha)]^2 - \frac{1}{2} f(\alpha) f''(\alpha)}$$

erhält.

Oefters ist es in der Praxis zweckmässig, ein System von Gleichungen irgend einer Art näherungsweise auf Gleichungen vom ersten Grade oder lineare zurückzuführen. Z. B. Zwischen den Grössen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ sind Gleichungen $F_1 = 0, F_2 = 0, F_3 = 0, \ldots$ gegeben. Man bestimme zuerst die x näherungsweise, so dass ihre wahren Werthe durch $c_1 + \xi_1, c_2 + \xi_2, c_3 + \xi_3, \ldots$ sich ausdrücken lassen, wobei die ξ sehr kleine Grössen sein werden, die wir näherungsweise als Differentiale behandeln, d. h. bei welchen wir die Quadrate und höheren Potenzen, so wie auch die Producte von verschiedenen ξ weglassen können. Nach der Taylorschen Reihe folgt dann aus

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots) = 0$$

die entwickelte Form

$$F + \frac{dF}{dx_1} \xi_1 + \frac{dF}{dx_2} \xi_2 + \frac{dF}{dx_3} \xi_3 + \ldots = 0$$

wo in F und seinen Differentialquotienten überall statt der x die c zu setzen sind.

§. 50.

Princip der Proportionalität kleiner Veränderungen.

Wenn in der Taylorschen Reihe h sehr klein ist, so hat man näherungsweise:

$$f(x + h) - f(x) = \frac{df(x)}{dx} h$$

Daraus ergiebt sich, dass die Differenzen einer (stetigen) Function

den Differenzen der Variablen beinah proportional sind, wenn die Differenzen sehr klein sind; dies ist desto genauer, je kleiner die Differenzen. Nämlich man hat näherungsweise

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x+h_1)-f(x)} \doteq \frac{h}{h_1}$$

Nur bei einer Function des ersten Grades ist dieser Satz für jede beliebige Differenz vollkommen streng; jede andere Function wird dadurch nur in ihren kleinen Aenderungen näherungsweise auf eine Function des ersten Grades zurückgeführt.

Bekanntlich hängt dieser Satz damit zusammen, dass jeder Curvenbogen um so mehr einer Geraden sich nähert, je kleiner der Bogen ist.

Die Fruchtbarkeit und Anwendbarkeit des so einfachen Principes der Proportionalität kleiner von einander abhängiger Veränderungen ist leicht einzusehen, und es beruhen auf demselben viele der wichtigsten Anwendungen der Analysis, wie z. B. die folgenden Fälle zeigen:

I. Wenn eine veränderliche Grösse x zwischen engen Grenzen schwankt, so kann man jede Function von x ohne merklichen Fehler auf die Form $a+bx$, d. h. auf die einfachste Gestalt bringen. Dies ist das allgemeine und einfachste Verfahren der Approximation, dessen sich die Analysten bedienen, z. B. in der Physik, wenn sie Untersuchungen dem Calcul unterwerfen wollen, die in ihrer ganzen Allgemeinheit sich jeder mathematischen Behandlungsweise entziehen.

II. Aus derselben Quelle entspringt unmittelbar die so häufig gebrauchte Theorie der Proportionaltheile, beim Interpoliren. Wir betrachten $y=f(x)$, und

$$\begin{aligned} &\text{für } x=a \text{ sei } y=f(a),\\ &\text{für } x=b \text{ sei } y=f(b),\\ &\text{für } x=c \text{ sei } y=f(c). \end{aligned}$$

Wenn nun $f(a)$ und $f(c)$ nur wenig von $f(b)$ abweichen, so ist näherungsweise die Anwendung der Proportionaltheile gestattet, so dass man hat:

$$\frac{f(b)-f(a)}{f(c)-f(a)} = \frac{b-a}{c-a}$$

Hier kann man $f(b)$ als das Gesuchte betrachten, oder a, u. s. w. und näherungsweise finden. — Dies Verfahren ist bei allen Functionen anwendbar, wenn sie nur innerhalb des durch a, b, c bestimmten Gebietes von Werthen der Veränderlichen continuirlich sind.

III. Unmittelbar mit dem Vorhergehenden hängt zusammen die näherungsweise Proportionalität zwischen den Fehlern in den Hypothesen und den Fehlern in den Resultaten

wenn die Fehler nur klein sind. Es sei eine Grösse x durch die Gleichung

$$f(x) = 0$$

bestimmt, und a und b seien zwei nur wenig vom wahren Werthe des x abweichende Hypothesen, also die Resultate $f(a)$ und $f(b)$ nur wenig von Null verschieden. Die Fehler der Hypothese und die Fehler des Resultates sind also

bei der ersten Voraussetzung: $a - x, f(a)$,

bei der zweiten Voraussetzung: $b - x, f(b)$.

Je näher die beiden aufgestellten Hypothesen der Wahrheit liegen, oder je kleiner die beiden Fehler $a - x$, $b - x$ dieser Hypothesen sind, desto näher wird auch das Verhältniss derselben, oder desto näher wird die Grösse $\frac{a-x}{b-x}$ der Grösse $\frac{f(a)}{f(b)}$ liegen, so dass die Gleichung

$$(\dagger) \qquad \frac{a-x}{b-x} = \frac{f(a)}{f(b)}$$

der Wahrheit desto näher kommt, je kleiner die Fehler der beiden Voraussetzungen sind. (Nur bei einer Gleichung des ersten Grades würde die angegebene Proportionalität vollkommen genau sein.)

§. 51.

Näherungsweise Auflösung einer Gleichung mit einer unbekannten Grösse.

In der gegebenen Gleichung

$$u = f(x) = 0$$

kann man u als eine Function von x ansehen, die für den gesuchten Werth von x gleich Null ist. Lässt man in diesem Ausdrucke x in $x + (a - x)$, das heisst in a übergehen, so hat man nach der Taylorschen Reihe

$$u' = u + (a - x)\frac{du}{dx} + \frac{(a-x)^2}{1.2}\frac{d^2u}{dx^2} + \dots$$

und ebenso erhält man, wenn x in $x + (b - x)$ oder in b übergeht,

$$u'' = u + (b - x)\frac{du}{dx} + \frac{(b-x)^2}{1.2}\frac{d^2u}{dx^2} + \dots$$

Je kleiner aber die Grössen $(a - x)$ und $(b - x)$ sind, d. h. je näher die beiden Hypothesen $x = a$ und $x = b$ der Wahrheit liegen, desto mehr wird man auch, in den beiden Reihen, die zweiten und höheren Potenzen dieser Grössen gegen die erste in einer blossen Annähe-

rung weglassen können. Bleibt man bei den ersten Potenzen von $(a-x)$ und $(b-x)$ stehen, und beachtet, dass $(u'-u)$ und $(u''-u)$ die Fehler der Resultate sind, so erhält man die Gleichung (†) des vorigen Paragraphen.

Diese Gleichung giebt einen verbesserten Werth von x, welcher der Wahrheit näher liegt, als die beiden vorhergehenden $x=a$ und $x=b$, so dass man daher mit dieser neuen Hypothese, in Verbindung mit einer der vorhergehenden, dieselbe jetzt bereits mehr gesicherte Rechnung wiederholen, und so, durch Fortsetzung der Operation, dem wahren Werthe der gesuchten Wurzel immer mehr sich nähern kann. Man wird das Verfahren so lange fortsetzen, bis zwei auf einander folgende Näherungswerthe in der erforderlichen Anzahl von Decimalstellen mit einander übereinstimmen.

Dieses Verfahren ist die sogenannte regula falsi (oder vielmehr regula prope veri), welche eine Näherungsmethode zur Auflösung aller numerischen Gleichungen liefert, die an Leichtigkeit und Allgemeinheit alle anderen Methoden übertrifft.

§. 52.

Näherungsweise Auflösung zweier Gleichungen mit zwei unbekannten Grössen.

Auch die auf zwei Veränderliche erweiterte Taylorsche Reihe lässt sich bei einem Näherungsverfahren anwenden, wie das folgende Beispiel zeigt.

Man habe zwei Gleichungen mit zwei unbekannten Grössen, die, wie oft der Fall ist, so untereinander verwickelt sind, dass man sie durch die gewöhnlichen Mittel der Elimination nicht trennen kann; dann lassen sich die Unbekannten durch folgende Näherung bestimmen. Es seien

$$u=f(x,y)=0,\ v=F(x,y)=0$$

die zwischen x und y gegebenen Gleichungen. Geht x über in $x+h=a$ und y in $y+k=b$, so geht u und v über in

$$u'=u+h\frac{du}{dx}+k\frac{du}{dy}$$

$$v'=v+h\frac{dv}{dx}+k\frac{dv}{dy}$$

wo a und b die Hypothesen, und $u'-u=\alpha$, $v'-v=\beta$ die Fehler dieser Hypothesen sind. — Geht aber x über in $x+h'=a'$, und y in $y+k'=b'$, so ist ebenso

$$u'' = u + h'\frac{du}{dx} + k'\frac{du}{dy}$$
$$v'' = v + h'\frac{dv}{dx} + k'\frac{dv}{dy}$$

wo a', b' die Hypothesen, und $u''-u=\alpha'$, $v''-v=\beta'$ die Fehler dieser Hypothesen sind. — Geht endlich x über in $x+h''=a''$, und y in $y+k''=b''$, so ist

$$u''' = u + h''\frac{du}{dx} + k''\frac{du}{dy}$$
$$v''' = v + h''\frac{dv}{dx} + k''\frac{dv}{dy}$$

wo a'', b'' die Hypothesen, und $u'''-u=\alpha''$, $v'''-v=\beta''$ die Fehler dieser Hypothesen sind. — Dies vorausgesetzt haben wir daher folgende sechs Gleichuugen:

$$\alpha = (a-x)\frac{du}{dx} + (b-y)\frac{du}{dy}$$
$$\beta = (a-x)\frac{dv}{dx} + (b-y)\frac{dv}{dy}$$
$$\alpha' = (a'-x)\frac{du}{dx} + (b'-y)\frac{du}{dy}$$
$$\beta' = (a'-x)\frac{dv}{dx} + (b'-y)\frac{dv}{dy}$$
$$\alpha'' = (a''-x)\frac{du}{dx} + (b''-y)\frac{du}{dy}$$
$$\beta'' = (a''-x)\frac{dv}{dx} + (b''-y)\frac{dv}{dy}$$

Eliminirt man dann aus diesen sechs Gleichungen die vier Grössen $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{dv}{dx}$ und $\frac{dv}{dy}$, so erhält man für die gesuchten genäherten Werthe von x und y

$$x = a + \frac{\gamma}{\varepsilon}(a'-a) + \frac{\delta}{\varepsilon}(a''-a)$$
$$y = b + \frac{\gamma}{\varepsilon}(b'-b) + \frac{\delta}{\varepsilon}(b''-b)$$

wo der Kürze wegen gesetzt wurde

$$\gamma = \alpha''\beta - \alpha\beta''$$
$$\delta = \alpha\beta' - \alpha'\beta$$
$$\varepsilon = \gamma + \delta + \alpha'\beta'' - \alpha''\beta'$$

IX. Fernere Anwendungen der Differentialrechnung.

§. 53.

Uebersicht.

Alle Anwendungen der Differentialrechnung gründen sich auf den Gebrauch der Taylorschen (oder Maclaurinschen) Reihe. Wir betrachten in diesem Abschnitte die Messung der Geschwindigkeit und Beschleunigung einer Function, so wie auch die allgemeine Theorie der grössten und kleinsten Werthe für eine Function von einer oder mehreren Veränderlichen, welche eine der wichtigsten Untersuchungen der Analysis bildet.

§. 54.

Geschwindigkeit und Beschleunigung einer Function.

Es giebt zwei Functionen, deren Gang für den menschlichen Geist am leichtesten zu erfassen ist, nämlich die ganze rationale Function vom ersten und die vom zweiten Grade: $a + bx$ und $a + bx + cx^2$, welche Functionen als die beiden elementaren erscheinen (denen gerade Linie und Parabel entsprechen). Mit denselben, wie mit einem Maase, vergleicht man jede Function in ihrem Gange, um die Schnelligkeit der Veränderung in jedem Zustande aufzufassen. — Diese Vergleichung (oder Assimilation) zweier Functionen beruht überhaupt auf folgender Betrachtung: Wenn zwei Functionen $y = f(x)$ und $y = F(x)$ für dasselbe x denselben Werth für y und dy haben, so stimmen beide Functionen in zwei stetig auf einander folgenden Werthen überein; wenn aber für dasselbe x die Werthe von y, dy und d^2y in beiden Functionen übereinstimmen, so fallen die Functionen in drei nächstfolgenden Zuständen zusammen; u. s. w.

I. Die Function des ersten Grades

$$y = a + bx$$

ändert sich gleichmässig (gleichförmig) mit x, d. h. die Differenzen des y sind den zugehörigen Differenzen des x proportional (mögen die Differenzen endlich oder unendlich klein sein); also gleichen Aenderungen von x entsprechen auch gleiche Aenderungen von y. Bezeichnet man zugehörige Aenderungen durch Δx und Δy, so ist $\Delta y = b\Delta x$; ändert sich x um 1, so ändert sich y um $\frac{\Delta y}{\Delta x} = b$.

Bei einer Function des ersten Grades ist auch $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$. Demnach hat man für eine Function des ersten Grades:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = b,$$

wo b positiv oder negativ ist, je nachdem y wächst oder abnimmt. Dieser constante Quotient misst an der Function die Geschwindigkeit ihrer Aenderung (im Verhältniss zu x). Die Function des ersten Grades ändert sich durchgängig, d. h. für alle Werthe des x, mit derselben Geschwindigkeit, so dass sie in ihrem Gange eine bestimmte Geschwindigkeit darstellt. Keine andere Function hat diese Eigenschaft.

Wir vergleichen nun jede beliebige Function

$$y = F(x)$$

mit einer Function des ersten Grades

$$y_1 = f(x) = a + bx.$$

Lassen wir in beiden dasselbe x um h wachsen, so giebt die Taylorsche Reihe:

$$F(x+h) = y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{2.3} + \dots$$

$$f(x+h) = y_1 + \frac{dy_1}{dx}h$$

Ist nun (bei demselben x) $y = y_1$, und lässt man h unendlich klein werden, damit die höheren Potenzen von h gegen die erste verschwinden, so fallen beide Entwickelungen zusammen, sobald ausserdem noch $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx}$ ist. Dann bestimmen sich in der Function $y_1 = a + bx$ die beiden Constanten a und b aus den beiden Gleichungen

$$y_1 = y;\ \frac{dy_1}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

das ist

$$a + bx = y;\ b = \frac{dy}{dx}$$

Demnach ist jede Function $y = F(x)$ mit einer Function des ersten Grades oder gleichmässigen (gleichförmigen) Function in zwei nächst folgenden Werthen (die zu x und $x + dx$ gehören) zusammenfallend, und der erste Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ misst die Geschwindigkeit, womit die Function für das bestimmte x sich ändert, das ist die Veränderungs-Geschwindigkeit. — Um also die Geschwin-

digkeit auch bei einer Function mit (stetig) veränderlicher Geschwindigkeit, d. i. allgemein aufzufassen, muss man die ungleichförmige Function in ihren kleinsten Aenderungen als gleichförmig ansehen.

II. Betrachten wir eine Function vom zweiten Grade

$$y = a + bx + cx^2$$

so ist hier die Geschwindigkeit nicht constant, sondern veränderlich, nämlich $\frac{dy}{dx} = b + 2cx = v$, aber die Aenderung der Geschwindigkeit ist der Aenderung des x proportional, so dass gleichen Differenzen des x gleiche Differenzen der Geschwindigkeit v entsprechen. Man hat $\Delta v = 2c\Delta x$, mögen diese Differenzen endlich oder unendlich klein sein; ändert sich x um 1, so ändert sich v um $\frac{\Delta v}{\Delta x} = 2c$. Auch ist hier $\frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}$. Betrachtet man dx als constant, so wird $\frac{dv}{dx} = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$. Demnach hat man für die Function des zweiten Grades:

$$\frac{\Delta\frac{dy}{dx}}{\Delta x} = \frac{d^2y}{dx^2} = 2c$$

Dieser constante Quotient misst an einer solchen Function die Aenderung (Ab- oder Zunahme) der Geschwindigkeit, das heisst die Beschleunigung der Aenderung (oder wenn er negativ, die Verzögerung). Eine Function des zweiten Grades wächst beständig mit derselben Beschleunigung, so dass sie in ihrem Verlauf eine bestimmte Beschleunigung (oder Verzögerung) darstellt. Keine andere Function hat diese Eigenschaft.

Wir vergleichen nun eine beliebige Function

$$y = F(x)$$

mit einer Function des zweiten Grades

$$y_1 = f(x) = a + bx + cx^2$$

Lassen wir in beiden dasselbe x um h wachsen, so giebt die Taylorsche Reihe:

$$F(x+h) = y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{2.3} + \dots$$

$$f(x+h) = y_1 + \frac{dy_1}{dx}h + \frac{d^2y_1}{dx^2}\frac{h^2}{2}$$

Ist nun für dasselbe x auch $y = y_1$, und lässt man h ins Unendliche abnehmen, damit die höheren Potenzen von h gegen die zweite verschwinden, so fallen beide Reihen zusammen, sobald ausserdem noch $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y_1}{dx^2}$ ist. Dann bestimmen sich in der Function $y_1 = a + bx + cx^2$ die drei Constanten a, b, c aus den drei Gleichungen:

$$y_1 = y;\ \frac{dy_1}{dx} = \frac{dy}{dx};\ \frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

das ist

$$a + bx + cx^2 = y;\ b + 2cx = \frac{dy}{dx};\ 2c = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Mit einer solchen Function des zweiten Grades oder einer gleichförmig beschleunigten Function fällt jede (ungleichförmig beschleunigte) Function $y = F(x)$ in drei nächst folgenden Zuständen (die zu x, $x + dx$ und $x + 2dx$ gehören) zusammen, und der zweite Differentialquotient $\frac{d^2y}{dx^2}$ misst die Beschleunigung der Veränderung der Function für das bestimmte x. — Um also die Beschleunigung auch bei einer Function mit veränderlicher Beschleunigung, d. i. allgemein aufzufassen, muss man die ungleichförmig beschleunigte Function in ihren kleinsten Aenderungen als gleichförmig beschleunigt betrachten.

Man sieht gleich, dass der Begriff der Beschleunigung mit dem der Kraft in der Mechanik unmittelbar zusammenhängt; nämlich Kraft heisst in der Dynamik die Ursache der Beschleunigung. Vor Erfindung der Differentialrechnung war man nicht im Stande, eine (continuirliche) Kraft durch einen allgemeinen arithmetischen Ausdruck zu messen.

III. Es ergiebt sich, dass die Differentialrechnung unumgänglich nothwendig ist, um die höchst wichtige und fundamentale Aufgabe zu lösen, Geschwindigkeit und Beschleunigung des Aenderns bei jeder Function $F(x)$ für jedes x zu messen. Eine Function des ersten Grades ändert sich mit constanter Geschwindigkeit, eine Function des zweiten Grades ändert sich mit constanter Beschleunigung; jene hat einen gleichförmigen Gang, diese einen gleichförmig beschleunigten. Um nun auch bei ungleichförmiger Veränderung sowohl Geschwindigkeit als Beschleunigung aufzufassen, vergleichen wir jede Function mit einer Function des ersten und des zweiten Grades, wozu nöthig ist, auf die kleinsten Veränderungen zurückzugehen. Dann hat jede Function mit einer Function des ersten Grades zwei nächste

Zustände gemein, aber mit einer Function des zweiten Grades noch innigere Gemeinschaft, nämlich drei nächste Zustände gemein. Mit andern Worten: man betrachtet jede (ungleichförmige) Function in zwei nächsten Zuständen als gleichförmig, und in drei nächsten als gleichförmig beschleunigt. Daher misst der erste Differentialquotient von $F(x)$ die Geschwindigkeit des Aenderns, und der zweite Differentialquotient die Beschleunigung des Aenderns von $F(x)$ für irgend ein x.

Anmerkung. Die im Vorhergehenden entwickelte Bestimmung der Geschwindigkeit und Beschleunigung einer Function beruht auf dem Gebrauche der Taylorschen Reihe, und setzt im Allgemeinen voraus, dass die Differentialquotienten der Function für den betrachteten Werth der Variablen endliche und bestimmte Werthe annehmen. Es ist also erforderlich, dass die Function für diesen Werth continuirlich sei. Wenn dies nicht stattfindet, so besitzt die Function einen singulären Werth, der eine besondere Untersuchung verlangt.

Die Infinitesimalrechnung liefert, wie wir gesehen haben, sehr leicht die bei der Anwendung so wichtigen zwei Grundformeln für die Theorie der ungleichförmigen Functionen, nämlich:

$$v = \frac{dy}{dx}; \varphi = \frac{dv}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

wo v die Geschwindigkeit und φ die Beschleunigung der Function $y = F(x)$ für den Werth x bedeutet.

Die ungleichmässig veränderlichen Functionen bilden das eigentliche Object der Differential- nnd Integralrechnung. Was die Regeldetri für die gleichmässig wachsende Function ax leistet, das thut die Analysis des Unendlichen für alle übrigen, nämlich die ungleichmässig veränderlichen. Daher lässt sich sagen, dass, sobald man sich nur über die Regeldetri erhebt, man eigentlich schon mitten in die Differential- und Integralrechnung eintritt.

Die Rechnung mit dem Unendlichkleinen verschafft den unermesslichen Gewinn, jede Function in ihren unendlichkleinen Aenderungen auf die elementaren Functionen zurückzuführen, das heisst: ungleichförmige Veränderung in den kleinsten Theilen (Elementen) auf gleichförmige zu reduciren. — Jede unendlichkleine Veränderung erfolgt gleichförmig.

Z. B. In der Geometrie wird das Krumme in den kleinsten Theilen auf das Gerade, in der Mechanik die ungleichförmige Bewegung in den kleinsten Theilen auf gleichförmige zurückgeführt.

§. 55.

Maxima und Minima der Functionen einer Veränderlichen.

Wenn ein besonderer Werth $f(a)$ der Function $f(x)$ grösser als die Nachbarwerthe ist, so heisst er ein Maximum; wenn er kleiner ist als die Nachbarwerthe, so heisst er ein Minimum. Also ein Maximum (grösster Werth) findet Statt, wenn die Function aus dem Wachsen ins Abnehmen übergeht, und ein Minimum (kleinster Werth) tritt ein, wenn die Function aus dem Abnehmen ins Wachsen übergeht. — Es ist möglich, dass eine Function weder ein Maximum noch ein Minimum hat (wie die Function des ersten Grades), aber auch, dass sie deren mehrere besitzt.

Wir wollen nun die Werthe der Variablen x bestimmen, wenn solche vorhanden sind, die den grössten oder kleinsten Werthen der Function $f(x)$ entsprechen. Wenn der Werth a von x einem Maximum der Function $f(x)$ entspricht, so muss $f(a+h)-f(a)$ negativ, und wenn a einem Minimum entspricht, so muss diese Differenz positiv sein, für ein positives sowohl als negatives h, wie klein auch h sein mag. Um dies zu untersuchen, giebt es nur dann eine allgemeine Regel, wenn der erste Differentialquotient der Function stetig ist in der Nachbarschaft von a, und diesen Fall allein wollen wir jetzt betrachten, indem wir fragen, ob die Function $y=f(x)$ für $x=a$ ein Maximum oder ein Minimum wird. Entwickelt man $f(x+h)$ durch die Taylorsche Reihe, so erhält man allgemein:

$$f(x+h)-f(x)=\frac{df(x)}{dx}h+\frac{d^2f(x)}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\frac{d^3f(x)}{dx^3}\frac{h^3}{2.3}+\dots$$

Bei den kleinsten Werthen von h wird das erste Glied dieser Reihe grösser als die Summe aller nachfolgenden, also stimmt das Vorzeichen der Reihe mit dem dieses ersten Gliedes überein. Demnach erhält $f(a+h)-f(a)$ für ein positives und negatives h verschiedene Vorzeichen, und also ist $f(a)$ weder ein Maximum noch ein Minimum, wenn nicht für $x=a$, $\frac{df(x)}{dx}=0$ wird. Ist dagegen bei diesem Werthe von x der Quotient $\frac{df(x)}{dx}$ gleich Null, so wird für $x=a$ die Function ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem bei diesem Werthe der Quotient $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ negativ oder positiv ausfällt, weil bei den kleinsten Werthen von h dies zugleich auch die Zeichen der

Differenzen $f(a \pm h) - f(a)$ sind. Sollte aber für $x = a$ auch der zweite Differentialquotient zu Null werden, so würde vom dritten und vierten Quotienten dasselbe gelten, was vom ersten und zweiten bemerkt worden. U. s. w. — Es folgt also allgemein: Eine Function $f(x)$ (deren Differentialquotienten continuirlich sind) ist für $x = a$ nur dann ein Maximum oder ein Minimum, wenn bei diesem Werthe von x eine ungerade Anzahl der auf einander folgenden Differentialquotienten verschwindet; ist diese Bedingung erfüllt, so findet ein Maximum oder ein Minimum Statt, je nachdem der folgende Differentialquotient für $x = a$ negativ oder positiv ausfällt.

Das allgemeine Verfahren zur Aufsuchung der Maxima und Minima einer gegebenen Function $y = f(x)$ (mit Ausschluss derjenigen, welche $\frac{dy}{dx}$ unendlichgross oder discontinuirlich machen), besteht also darin, dass man die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

in Bezug auf x auflöst, wodurch man einen oder mehrere Werthe von x erhält. Diesen Werthen entspricht ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem sie in $\frac{d^2y}{dx^2}$ substituirt, diesen Quotienten negativ oder positiv machen. — Sollte dieser zweite Differentialquotient auch zu Null werden, so müsste man auf den dritten und vierten Differentialquotienten übergehen, u. s. w.

Häufig kann man schon aus der Natur des Gegenstandes entscheiden, ob ein Maximum oder ein Minimum stattfinden kann, und dann braucht man den zweiten Differentialquotienten, der auch oft ziemlich verwickelt wird, nicht zu Rathe zu ziehen.

Es kann auch ausnahmsweise der Fall eintreten (welcher aber bei Anwendungen sehr selten ist), dass ein Maximum oder Minimum für einen solchen Werth des x stattfindet, welcher die Differentialquotienten unendlichgross macht, in welchem Falle die Taylorsche Reihe unbrauchbar wird. Dann kann man also die vorhergehenden Regeln nicht mehr anwenden, sondern muss in einem solchen Ausnahmefalle auf specielle Weise den Gang der Functionswerthe untersuchen.

§. 56.

Näherungsregel.

Leicht ersieht man die folgende **Näherungsregel**: Eine (stetige) Function ändert sich in der Nähe eines Maximums oder Mini-

mums (zu beiden Seiten) sehr langsam (bleibt fast constant), und erfährt in der Nähe eines Maximums oder Minimums fast dieselbe Veränderung, wenn die Variable um dieselbe Grösse ab- oder zunimmt.

Z. B. Die Dichtigkeit des Wassers nimmt in der Nähe seiner grössten Dichtigkeit sehr langsam ab, und die Dichtigkeiten des Wassers für zwei Temperaturen, die von der Temperatur seiner grössten Dichtigkeit, zu beiden Seiten innerhalb gewisser Grenzen, gleich weit abstehen, sind einander gleich.

Es ist nämlich

$$f(x \pm h) - f(x) = \pm h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) \pm \frac{h^3}{2.3} f'''(x) + \ldots$$

Diese Differenz hängt für ein sehr kleines h hauptsächlich vom Gliede mit h ab; wenn aber $f(x)$ ein Maximum oder Minimum, also $f'(x) = 0$ ist, so wird diese Differenz gleich

$$\frac{h^2}{2} f''(x) \pm \frac{h^3}{2.3} f'''(x) + \ldots$$

hängt also für ein sehr kleines h hauptsächlich vom Gliede mit h^2 ab. Folglich muss die Function, wenn sie ein Maximum oder Minimum wird, langsamer ab- oder zunehmen.

Ferner wenn $f(x)$ ein Maximum oder Minimum ist, also $f'(x) = 0$, so hat man für ein sehr kleines h, indem man die höheren Potenzen des h vernachlässigt, sehr nahe:

$$f(x \pm h) - f(x) = \frac{h^2}{2} f''(x)$$

welches Resultat vom Zeichen des h unabhängig ist.

§. 57.

Maxima und Minima der Functionen von mehreren Veränderlichen.

Das Verfahren des §. 55 findet auch Anwendung bei Functionen von zwei Variablen. Wir setzen dabei voraus, dass die Taylorsche Reihe eine brauchbare Entwickelung giebt, wie es bei den meisten Anwendungen wirklich der Fall ist. Es sei gegeben

$$z = f(x, y).$$

Die Entwickelung von $f(x + h, y + k) = Z$ liefert:

$$Z - z = \left(\frac{dz}{dx} h + \frac{dz}{dy} k\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2} h + \frac{d^2z}{dxdy} 2hk + \frac{d^2z}{dy^2} k^2\right) + \ldots$$

Hier handelt es sich nur um das Zeichen dieser Differenz, worüber bei den kleinsten Werthen von h und k die Glieder der niedrigsten

Ordnung entscheiden. Soll nun die Function für $x=a$, $y=b$ ein **Maximum** oder **Minimum** werden, so müssen, wie klein h und k auch sein mögen, die benachbarten Werthe, deren es hier 4 giebt, nämlich $f(a \pm h, b \pm k)$ im ersten Falle gleichzeitig kleiner, im letzteren aber grösser als $f(a, b)$ sein, d. h. es müssen die vier aus $Z - z$ hervorgehenden Differenzen gleichzeitig negativ oder positiv sein. Damit dieses möglich sei, muss bei diesen Werthen von $x=a$ und $y=b$ das Glied $\frac{dz}{dx}h + \frac{dz}{dy}k$ Null sein, und also, da die h und k unabhängig von einander sind, einzeln

$$\frac{dz}{dx}=0, \ \frac{dz}{dy}=0$$

sein. Sind diese Bedingungen erfüllt, so muss ferner, damit z ein Maximum oder Minimum wird, die Grösse

$$\frac{d^2z}{dx^2}h^2 + \frac{d^2z}{dxdy}2hk + \frac{d^2z}{dy^2}k^2$$

bei beliebig kleinen positiven oder negativen Werthen von h und k, beständig negativ bleiben für ein Maximum, oder beständig positiv bleiben für ein Minimum.

Wenn die Werthe a und b, welche die Glieder der ersten Ordnung zu Null machen, auch die Glieder der zweiten Ordnung zum Verschwinden bringen, so ist aus dem Vorigen klar, dass ihnen nur dann ein Maximum oder Minimum der Function entsprechen kann, wenn auch die Glieder der dritten Ordnung für diese Werthe verschwinden. Ueberdies muss die Summe der Glieder der vierten Ordnung beständig negativ sein, damit ein Maximum stattfinde, oder beständig positiv, damit ein Minimum eintrete. U. s. w.

In den allermeisten Fällen lässt sich schon aus der Natur des Gegenstandes entscheiden, ob die Function ein Maximum oder ein Minimum sein kann, und in jedem Falle, wenn die Entscheidung nicht unmittelbar möglich wäre, würden die Nachbarwerthe der Function (die zu suchen, es oft bequemer ist, als auf die höheren Differentialquotienten überzugehen) hierüber Aufschluss geben.

Auf ähnliche Weise findet man die Bedingungen für das Maximum oder Minimum einer Function, wenn die Anzahl der Variablen grösser ist. Es sei z. B. die Function

$$u=f(x, y, z)$$

gegeben. Dann müssen die Werthe der Variablen x, y, z, welche einem Maximum oder Minimum der Function u entsprechen, den drei Gleichungen

$$\frac{du}{dx}=0,\ \frac{du}{dy}=0,\ \frac{du}{dz}=0$$

genügen, und ferner ist nöthig, dass bei beliebigen kleinsten Werthen von g, h, k die Summe der Glieder der zweiten Ordnung in der Entwickelung von $f(x+g, y+h, z+k)$ ihr Vorzeichen nicht ändert.

§. 58.

Maxima und Minima der unentwickelten Functionen.

Bisher haben wir Maxima und Minima von entwickelten Functionen betrachtet. Jetzt aber sei

$$V=f(x, y, z, t, \ldots)$$

eine Function von $m+n$ veränderlichen Grössen, welche durch n Bedingungsgleichungen

(1) $$L=0, M=0, N=0, \ldots$$

mit einander verbunden sind, so dass m Veränderliche unabhängig bleiben. Nun soll die Function V ein Maximum oder Minimum werden. Dann muss man die partiellen Differentialquotienten dieser Function nach jeder der unabhängig Variablen gleich Null setzen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, das totale Differential dieser Function gleich Null setzen für beliebige Werthe der unabhängigen Differentiale. Das nächstliegende Verfahren wäre nun hier, vermittelst der gegebenen n Gleichungen eben so viel Variable zu eliminiren, so dass V als Function von m unabhängig Variablen erscheint. Aber diese Weise des Eliminirens ist im Allgemeinen schwierig oder selbst unmöglich. Man verfährt deshalb auf folgende Weise.

Wenn man V zu einem Maximum oder Minimum machen will, so muss man $dV=0$ oder

(2) $$\frac{dV}{dx}dx+\frac{dV}{dy}dy+\frac{dV}{dz}dz+\ldots=0$$

setzen. Ausserdem geben die n Bedingungsgleichungen differenzirt:

$$dL=0,\ dM=0,\ dN=0, \ldots$$

das sind die Differentialgleichungen:

(3) $$\begin{cases} \frac{dL}{dx}dx+\frac{dL}{dy}dy+\frac{dL}{dz}dz+\ldots=0 \\ \frac{dM}{dx}dx+\frac{dM}{dy}dy+\frac{dM}{dz}dz+\ldots=0 \\ \frac{dN}{dx}dx+\frac{dN}{dy}dy+\frac{dN}{dz}dz+\ldots=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Wären nun alle Variablen x, y, z, t, ... völlig unabhängig, so würden die Differentiale dx, dy, dz, dt, ... willkürlich sein, und die Gleichung (2) würde die separirten Gleichungen $\frac{dV}{dx} = 0$, $\frac{dV}{dy} = 0$, $\frac{dV}{dz} = 0, \ldots$ zur Folge haben. Aber die Werthe dieser Differentiale müssen zugleich auch den Gleichungen (3) genügen. Man wird deshalb mittelst der n Gleichungen (3) die Werthe von n abhängigen Differentialen bestimmen, in die Gleichung (2) substituiren, und in dieser die Coefficienten der m willkürlich bleibenden Differentiale einzeln gleich Null setzen. Mit andern Worten: Man muss zwischen allen $n + 1$ Gleichungen (2) und (3) n Differentiale eliminiren, und die Coefficienten der in der Endgleichung übrigbleibenden m Differentiale gleich Null setzen. Diese m Gleichungen in Verbindung mit den n Gleichungen (1) geben dann die gesuchten Werthe von x, y, z, t, ..., welche die Function V zu einem Maximum oder Minimum machen. Diese Methode erfordert nur Eliminationen zwischen Gleichungen des ersten Grades. — Aber zu demselben Resultate kann man viel einfacher gelangen, nämlich die Elimination zwischen den Gleichungen (2) und (3) lässt sich am elegantesten durch die Methode der unbestimmten Multiplicatoren, wovon man häufig in der Analysis Gebrauch macht, bewerkstelligen. Man multiplicire die Differentialgleichungen

$$dL = 0, \; dM = 0, \; dN = 0, \ldots$$

respective mit den unbestimmten Factoren λ, μ, ν, ... und addire sie zur Gleichung $dV = 0$, wodurch man die einzige Gleichung

$$dV + \lambda dL + \mu dM + \nu dN + \ldots = 0$$

erhält, das ist:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dV}{dx} dx + \frac{dV}{dy} dy + \frac{dV}{dz} dz + \ldots \\ + \lambda\left(\frac{dL}{dx} dx + \frac{dL}{dy} dy + \frac{dL}{dz} dz + \ldots\right) \\ + \mu\left(\frac{dM}{dx} dx + \frac{dM}{dy} dy + \frac{dM}{dz} dz + \ldots\right) \\ + \nu\left(\frac{dN}{dx} dx + \frac{dN}{dy} dy + \frac{dN}{dz} dz + \ldots\right) \\ + \ldots \end{array}\right\} = 0$$

Indem man nun über $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ angemessen verfügt, kann man dadurch die Coefficienten derjenigen Differentiale, welche man eliminiren will, zu Null werden lassen; sodann hat man die Coefficienten

der übrigen Differentiale, welche willkürlich bleiben, gleich Null zu setzen. Dieses kommt aber offenbar auf dasselbe hinaus, als wenn man alle Veränderlichen wie unabhängige betrachtet hätte, und folglich die Coefficienten aller Differentiale dx, dy, dz, dt, ... in der Gleichung $dV + \lambda dL + \ldots = 0$ einzeln gleich Null gesetzt hätte. Man erhält dadurch eben so viele verschiedene Gleichungen, welche in Verbindung mit den gegebenen Gleichungen $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$ genau die nöthige Anzahl geben, um daraus sowohl die unbestimmten Multiplicatoren $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ zu eliminiren, als auch die gesuchten Werthe der Variablen x, y, z, t, ... bestimmen zu können. — Wir bemerken noch, dass diese Rechnung ebenso ist, als wenn man das absolute Maximum oder Minimum von $V + \lambda L + \mu M + \ldots$ suchen, und nachher auf die Gleichungen $L = 0$, $M = 0, \ldots$ Rücksicht nehmen wollte.

§. 59.

Methode der kleinsten Quadrate.

Eine sehr wichtige Anwendung der Lehre vom Maximum und Minimum ist die Methode der kleinsten Quadrate, deren man sich bedient, um aus einer grossen Anzahl von Beobachtungen diejenigen Resultate zu erhalten, welche mit der Gesammtheit der Beobachtungen am besten übereinstimmen. — Es ist nämlich für den Menschen unmöglich, beim Messen irgend einer Grösse absolute Genauigkeit zu erlangen, daher alle Beobachtungen und Versuche stets mit Fehlern behaftet sind wegen Unvollkommenheit der Sinne und Instrumente. Man wiederholt also die Beobachtungen mit der grössten Sorgfalt, so dass sie sämmtlich gleiches Vertrauen verdienen, und combinirt dann dieselben auf eine solche Weise, dass die daraus abgeleiteten Resultate mit den möglich kleinsten Fehlern behaftet sind. — Die Fehler werden theils positiv, theils negativ sein. Jeder Fehler ist als Verlust anzusehen. Damit nun ein negativer Fehler nicht als Vortheil erscheine, was offenbar widersinnig ist, so drückt man die Grösse des Verlustes durch eine gerade Potenz des Fehlers aus, weil diese positiv bleibt, der Fehler mag positiv oder negativ sein. Die einfachste gerade Potenz ist die zweite, und die einfachste Combination ist die Summe. Demnach besteht die einfachste Methode, die Fehler auf den kleinsten Werth zu bringen, darin, das Minimum ihrer Quadratsumme zu suchen. Bei der Anwendung dieser Methode kommen hauptsächlich folgende Fälle vor:

I. Der einfachste Fall ist hier, wenn nur eine Grösse x gesucht wird. Hat man dafür bei n mal wiederholten Beobachtungen die Werthe $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ gefunden, so muss man, nach der angegebenen Regel, x so bestimmen, dass

$$(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+(x-a_3)^2+\ldots+(x-a_n)^2=\text{Min.}$$

wird. Hieraus ergiebt sich sofort

$$x=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}$$

d. h. das arithmetische Mittel aus den beobachteten Werthen.

II. Zusammengesetzter ist der folgende Fall: Die gesuchten Grössen sind unabhängig von einander, aber sie können nicht unmittelbar beobachtet werden, sondern statt ihrer werden andere Grössen beobachtet, welche mit ihnen in einem bestimmten Zusammenhange stehen. Dieser Fall kommt vorzüglich in der Physik vor, bei Bestimmung der Constanten in einer empirischen Gleichung. — Es sei z. B. y eine Function von x von folgender Form: $y=ax^m+bx^n+cx^p$; man kennt die Exponenten m, n, p, welche häufig z. B. die Zahlen 0, 1, 2, oder 1, 2, 3 sind; und zur Bestimmung der Coefficienten a, b, c hat man für zahlreiche Werthe von x die entsprechenden Werthe von y (mit gleicher Genauigkeit) beobachtet. Wären diese Werthe von y genau, so brauchte man deren zur Bestimmung der drei Coefficienten a, b, c nur drei; da sie aber alle mit Beobachtungsfehlern behaftet sind, so wird, wenn man sich für a, b, c die richtigen oder wenigstens die der Wahrheit möglichst nahe kommenden Werthe, für x und y aber die zusammengehörigen Beobachtungswerthe gesetzt denkt, die Gleichung zwischen x und y niemals genau erfüllt werden, oder die Differenz

$$ax^m+bx^n+cx^p-y=u$$

wird niemals genau Null sein, sondern bald einen positiven, bald einen negativen Fehler darstellen. Man bestimmt nun die unbekannten Werthe von a, b, c so, dass die Summe aller Quadrate von u möglichst klein sei. Man setze demnach

$$ag_1+bh_1+cl_1-y_1=u_1$$
$$ag_2+bh_2+cl_2-y_2=u_2$$
$$\text{allgemein: } ag_n+bh_n+cl_n-y_n=u_n$$

in welchen Gleichungen g_1, h_1, l_1 die Werthe bedeuten, welche die Potenzen x^m, x^n, x^p für $x=x_1$ erhalten, wobei y_1 der beobachtete Werth von y ist; eben so wie g_2, h_2, l_2 dem Werthe x_2 entsprechen, für welchen y_2 der beobachtete Werth von y ist; u. s. f. für die

übrigen. Alsdann soll also die Summe $u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2$ ein Minimum sein; oder

$$(ag_1 + bh_1 + cl_1 - y_1)^2 + (ag_2 + bh_2 + cl_2 - y_2)^2 + \ldots = \text{Min.}$$

Da die Werthe von a, b, c unabhängig von einander sind, so muss, um vorstehende Quadratsumme möglichst klein zu machen, jeder ihrer drei Differentialquotienten nach a, b, c für sich Null gesetzt werden. Nimmt man also den Differentialquotienten zuerst nach a, und setzt ihn Null, so erhält man folgende Gleichung:

$$(ag_1 + bh_1 + cl_1 - y_1) g_1 + (ag_2 + bh_2 + cl_2 - y_2) g_2 + \ldots = 0$$

welche zur Abkürzung folgendermassen geschrieben werden mag:

$$a\Sigma g^2 + b\Sigma hg + c\Sigma gl = \Sigma gy$$

Auf dieselbe Weise erhält man noch zwei Gleichungen, indem man die Differentialquotienten nach b und c Null setzt, nämlich:

$$a\Sigma gh + b\Sigma h^2 + c\Sigma hl = \Sigma hy$$
$$a\Sigma gl + b\Sigma hl + c\Sigma l^2 = \Sigma ly$$

Aus diesen drei Gleichungen sind die Werthe von a, b, c zu berechnen, welche sich der Gesammtheit der Beobachtungen am besten anschliessen. — Uebrigens ist schon von selbst einleuchtend, dass die Quadratsumme einen bestimmten grössten Werth nicht hat (weil man sich nach allen Richtungen von den Beobachtungen immer mehr entfernen kann), einen kleinsten dagegen haben muss.

III. In den Ausgleichungs-Rechnungen der praktischen Geometrie kommt besonders häufig der Fall vor, dass die gesuchten Grössen zwar unmittelbar beobachtet werden, aber nicht unabhängig von einander sind, sondern zwischen ihnen bestehende Bedingungen erfüllen müssen. — Man habe für n Grössen $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ durch Beobachtungen von gleicher Genauigkeit die Werthe: $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \xi_n$ gefunden, und die n Grössen x sollen m Bedingungsgleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$, ... $F_m = 0$ genügen, wobei immmer $m < n$ ist. Sind $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots \Delta_n$ die Fehler der Beobachtungen, so hat man $\xi_1 - \Delta_1$, $\xi_2 - \Delta_2$, $\xi_3 - \Delta_3$, ... $\xi_n - \Delta_n$ an die Stelle von $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ in den Bedingungsgleichungen zu setzen, damit diese erfüllt werden. Nach der Methode der kleinsten Quadrate sind nun die Δ so zu bestimmen, dass

$$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots + \Delta_n^2$$

ein Minimum wird, mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen (wie §. 58 lehrt). — Wir bemerken noch, dass wenn hier, wie sehr häufig vorkommt, die Bedingungsgleichungen nicht linear (oder vom ersten Grade) sind, man auf folgende Weise verfährt: Behandelt man die Δ ihrer Kleinheit wegen, durch Weglassung ihrer höheren Potenzen

und Producte, als Differentiale, so giebt jede Gleichung $F=0$ mittelst der Taylorschen Reihe:

$$F+\frac{dF}{dx_1}\Delta_1+\frac{dF}{dx_2}\Delta_2+\ldots+\frac{dF}{dx_n}\Delta_n=0$$

wo man in F und dessen Differentialquotienten durchgängig die beobachteten ξ statt der x zu setzen hat. Solche Gleichungen haben gegen die Gleichungen $F=0$ den Vortheil, dass sie linear sind.

Ueber die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf geodätische Aufgaben siehe: Die Ausgleichungs-Rechnungen der praktischen Geometrie von Ch. L. Gerling. 1843.

§. 60.

Princip des kleinsten Zwangs (oder der grösstmöglichen Freiheit) als Grundgesetz der Natur.

Wenn auf ein System materieller Puncte gegebene Kräfte wirken, so können die Angriffspuncte derselben, wegen des unter ihnen bestehenden Zusammenhanges, sich im Allgemeinen weder nach den Richtungen dieser Kräfte, noch mit den Geschwindigkeiten, welche diese Kräfte den gegebenen Puncten, wenn dieselben isolirt wären, nach Maas der in ihnen vereinigten Massen ertheilen würden, bewegen, sondern diese Puncte sind genöthigt, andere Richtungen einzuschlagen, und andere Geschwindigkeiten anzunehmen.

Es ist nun sehr merkwürdig, sagt der grösste Mathematiker unseres Jahrhunderts, dass die freien Bewegungen, wenn sie mit nothwendigen Bedingungen nicht bestehen können, von der Natur gerade auf dieselbe Art modificirt werden, wie der rechnende Mathematiker, nach der Methode der kleinsten Quadrate, Erfahrungen ausgleicht, die sich auf untereinander durch nothwendige Abhängigkeit verknüpfte Grössen beziehen.

Gauss hat nämlich das allgemeine Grundgesetz der Mechanik in einer neuen Form dargestellt, welche unmittelbar die Bewegung wie das Gleichgewicht umfasst, so dass auf dasselbe die gesammte Mechanik gegründet werden kann. Dieses Grundprincip ist folgendes:

Die Bewegung eines Systems materieller auf was immer für eine Art unter sich verknüpfter Puncte, deren Bewegungen zugleich an was immer für äussere Beschränkungen gebunden sind, geschieht in jedem Augenblick in möglich grösster Uebereinstimmung mit der freien Bewegung, oder unter möglich kleinstem

Zwange, indem man als Maas des Zwanges, den das ganze System in jedem Zeittheilchen erleidet, die Summe der Producte aus dem Quadrate der Ablenkung jedes Punctes von seiner freien Bewegung in seine Masse betrachtet.

Sind nämlich $m, m', m'', \ldots$ die Massen der Puncte; $a, a', a'', \ldots$ ihre Orte zur Zeit t; $b, b', b'', \ldots$ die Orte, welche sie nach der unendlich kleinen Zeit dt, in Folge der während dieser Zeit auf sie wirkenden Kräfte und der zur Zeit t erlangten Geschwindigkeiten und Richtungen, einnehmen würden, falls sie alle vollkommen frei wären; so werden die wirklichen Orte $c, c', c'', \ldots$ diejenigen sein, für welche, unter allen mit den Bedingungen des Systems vereinbaren,

$$m(bc)^2 + m'(b'c')^2 + m''(b''c'')^2 + \ldots$$

ein Minimum wird.

Das Gleichgewicht ist offenbar nur ein einzelner Fall dieses allgemeinen Gesetzes (indem dann blos die Puncte a selbst an die Stelle der Puncte c treten), und die Bedingung dafür, dass

$$m(ab)^2 + m'(a'b')^2 + m''(a''b'')^2 + \ldots$$

selbst ein Minimum sei, oder dass das Beharren des Systems im Zustande der Ruhe, der freien Bewegung der einzelnen Puncte näher liege, als jedes mögliche Heraustreten aus demselben.

Alle Folgerungen aus dem aufgestellten Grundprincipe der Mechanik stimmen mit den Natur-Erscheinungen überein, und dieses Princip enthält wohl den erhabensten Gedanken, welchen die Naturwissenschaft bis jetzt aufweisen kann.

Das Princip der Mechanik muss für die gesammte Naturwissenschaft von der grössten Wichtigkeit sein, weil alle Veränderungen der Körperwelt (wie schon Aristoteles einsah) in unserer Vorstellung auf Bewegungen zurückkommen.

§. 61.

Uebersicht des Ganges einer Function.

Man ist durch die bisherigen Betrachtungen im Stande, den Gang einer Function $f(x)$ von einer Variablen x für alle reellen Werthe von x, die von $-\infty$ durch 0 bis $+\infty$ stetig auf einander folgen, zu bestimmen.

Wird h unendlichklein gedacht, so drückt $x + h$ den dem x nächstvorhergehenden und auch den nächstfolgenden Werth von x aus, wenn h einmal negativ und dann positiv genommen wird; man hat nach der Taylorschen Reihe:

$$f(x+h)-f(x)=f'(x)\,h+f''(x)\frac{h^2}{2}+f'''(x)\frac{h^3}{2.3}+\ldots$$

Betrachtet man nun alle die reellen Werthe von x, für welche die Function $f(x)$ und ihre Differentialquotienten bestimmte reelle Werthe erhalten, also weder unendlichgross noch imaginär werden, so folgt:

1) $f(x)$ ändert sich mit x zugleich stetig, weil die Aenderung von $f(x)$ zugleich mit der von x unendlichklein wird.

2) Die Geschwindigkeit des Aenderns, von jedem x aus, wird durch $f'(x)$ gemessen, und die Beschleunigung des Aenderns wird durch $f''(x)$ gemessen.

3) Wenn für einen Werth von $x, f'(x)=0$ ist, und zugleich der erste nicht verschwindende Differentialquotient von gerader Ordnung ist, so wird für denselben Werth von $x, f(x)$ ein Kleinstes oder ein Grösstes, je nachdem dieser Quotient positiv oder negativ ist.

4) Ist $f(x)$ zwischen $x=a$ und $x=b$ stetig, und haben $f(a)$ und $f(b)$ entgegengesetzte Zeichen, so liegt zwischen a und b wenigstens ein Werth von x, welcher $f(x)$ gleich Null macht.

U. s. w.

§. 62.

Bemerkenswerthe Functionen.

I. Dass die ganzen rationalen Functionen des ersten und zweiten Grades wegen ihrer einfachen Differentialverhältnisse wichtig sind, haben wir bereits im §. 54 betrachtet.

II. Durch Einfachheit des Differentialverhältnisses ist auch die (einfachste) Exponentialfunction ausgezeichnet, daher dieselbe in der ganzen Analysis von so grosser Wichtigkeit ist, auch oft in der Natur vorkommt. Nämlich wenn

$$y=e^{ax+b},\ \text{oder}\ ly=ax+b$$

so ist

$$\frac{dy}{dx}=ay$$

d. h. y ist eine solche Function von x, dass die Geschwindigkeit des Aenderns von y proportional dem y selbst ist.

Hier ist a eine constante Grösse, positiv oder negativ, je nachdem y wächst oder abnimmt, wenn x wächst.

Z. B. Nach einem solchen Gesetze wächst ein Capital y mit der Zeit x, wenn dasselbe auf stetigen Zinseszinsen steht (d. h. wenn die Zinsen in jedem Augenblicke zum Capitale geschlagen werden könnten); ferner wächst darnach die Reibung y eines um einen Cy-

linder geführten Seiles mit der Bogenlänge x; nach demselben Gesetze nimmt stetig ab der Luftdruck y mit der Höhe x, die Geschwindigkeit y eines bewegten Körpers in einem widerstehenden Mittel mit der Zeit x; darnach erlöscht allmählig Licht und Wärme in absorbirenden Mitteln; auch geht nach diesem Gesetze Electricität verloren durch Ausstrahlung der Oberflächen; u. s. w. — Hier wächst eine Grösse durch stetiges Erzeugen neuer Theile, während das schon Erzeugte in gleichem Maasse mit erzeugen hilft; oder umgekehrt: es findet eine Absorption (allmählige Erlöschung) Statt.

III. Bei der einfachsten Relation

$$y = ax$$

ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

d. h. die Differentiale der von einander abhängigen Grössen verhalten sich hier wie diese Grössen selbst.

IV. Wenn die Relation

$$y^2 - x^2 = a$$

stattfindet, so folgt daraus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

d. h. die Differentiale verhalten sich hier wie umgekehrt die Grössen selbst.

Dieser Fall findet z. B. beim rechtwinkligen Dreieck Statt. Während man eine Kathete c constant lässt, sei die andere Kathete x und also auch die Hypotenuse y veränderlich. Dann bilden, wie man leicht sieht, dx und dy ein Dreieck, dessen Gestalt sich dem von y und x gebildeten Dreieck ohne Ende nähert, so dass man $y dy = x dx$ erhält, woraus $y^2 = x^2 + a$, und endlich, da $y = c$ für $x = 0$, $y^2 = x^2 + c^2$ das ist der Pythagorische Lehrsatz sich ergiebt.

V. Aus

$$xy = a$$

folgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

VI. Aus

$$x^2 + y^2 = a$$

folgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

VII. Merkwürdig ist ferner die Function

$$y = ae^{nx} + be^{-nx}$$

bei welcher

$$\frac{d^2y}{dx^2} = n^2y$$

d. h. die Beschleunigung proportional ist der Function selbst. — Diese Function kommt bei der Gleichung der Kettenlinie, bei der Wärme-

bewegung in festen Körpern, bei der Electricitätsbewegung, bei Vertheilung des Magnetismus, und sonst oft in Mechanik und Physik vor.

VIII. Wenn

$$y = a\cos(nx) + b\sin(nx)$$

so ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -n^2y$$

IX. Für die Function

$$y = ae^{bx^2}$$

ist

$$\frac{dy}{dx} = 2bxy$$

d. h. die Geschwindigkeit ist zusammengesetzt proportional der Function und der Variablen.

X. Besondere Aufmerksamkeit verdienen auch die periodischen Functionen, welche schon im §. 25 erwähnt sind.

XI. Unter den nichtperiodischen Functionen sind ferner besonders bemerkenswerth die Functionen, welche sich ohne Ende dem Werthe Null, oder jedem andern festen Werthe nähern, wenn die unabhängig Veränderliche zu- oder abnimmt; z. B. die Functionen:

$$y = \frac{1}{b + x^m},\ y = b + a^{-x^n},$$

wo a, m, n positive Zahlen bezeichnen, und a grösser als die Einheit angenommen wird. Functionen dieser Art kommen häufig in dem Ausdrucke physikalischer Erscheinungen vor. Insbesondere ist hier die Function $y = a^{-x^2}$ zu bemerken, welche der einfachste Typus der Functionen ist, die zu beiden Seiten des Nullwerthes der unabhängig veränderlichen Grösse sehr schnell und auf gleiche Weise abnehmen, so dass der Zahlenwerth dieser Function für wenig beträchtliche Zahlenwerthe der unabhängig veränderlichen Grösse schon sehr klein ist, wie wenig die constante Zahl a auch grösser sein mag, als die Einheit.

Integralrechnung.

I. Einleitung.

§. 63.

Erklärung der Integralrechnung.

Jede Operation erzeugt ihre inverse Operation, bei welcher letzteren man das Resultat der ersteren als gegeben, und das Gegebene der ersteren als gesucht betrachtet. Die Differenzirung d. i. die Operation, welche das Differential einer Function bildet, führt also natürlich zu der Operation, welche die Function sucht, von der man das Differential kennt, und diese letztere Operation heisst Integrirung. Die Integralrechnung ist die inverse (umgekehrte) Operation der Differentialrechnung. Wir werden sehen, dass die Integralrechnung eben so schwierig und unvollendet ist, als die Differentialrechnung leicht und abgeschlossen erscheint.

§. 64.

Gegenstand der Integralrechnung.

In der Integralrechnung sind zwei Hauptfälle zu unterscheiden, nämlich man hat es entweder mit einer Function einer oder mit einer Function mehrerer Variablen zu thun.

I. Betrachten wir eine Function y einer Variablen x, so giebt es wieder folgende Fälle:

1) Im einfachsten Falle kennt man das erste oder ein höheres Differential von y, unmittelbar durch x allein, d. i. entwickelt ausgedrückt, und soll y als Function von x finden.

2) Das Differential von y enthält in seinem Ausdrucke das y selbst, gemischt mit x, d. i. man hat blos eine Gleichung zwischen x, y und den Differentialquotienten von y, und soll nun die Function y suchen, welche einer solchen Gleichung entspricht; hier ist also eine Differentialgleichung mit 2 Veränderlichen zu integriren.

II. Betrachten wir eine Function von zwei oder mehreren Variablen, so können für das Integriren folgende Fälle eintreten:

1) Irgend ein partieller Differentialquotient ist entwickelt gegeben durch die unabhängigen Variablen.

2) Man kennt unmittelbar alle partiellen Differentialquotienten derselben Ordnung, also das totale Differential der gesuchten Function, blos durch die unabhängig Variablen d. i. entwickelt ausgedrückt.

3) In den Ausdrücken für die Differentialquotienten, also im totalen Differentiale der unbekannten Function steckt noch die Function selbst gemischt mit den unabhängig Variablen, d. h. man hat eine totale Differentialgleichung zwischen 3 oder mehreren Veränderlichen.

4) Es ist nur eine Relation zwischen der Function, ihren partiellen Differentialquotienten und den unabhängig Variablen, d. i. eine partielle Differentialgleichung gegeben.

II. Integration der Differentialformeln mit einer einzigen Veränderlichen (oder Quadraturen).

§. 65.

Begriff des Integrals.

Eine Differentialformel der ersten Ordnung mit einer Variablen x hat allgemein die Form

$$Xdx$$

wo X irgend eine Function von x bedeutet. Diesen Differentialausdruck kann man immer als das Resultat der Differenzirung einer gewissen Function y der Variablen x betrachten, so dass man hat

$$dy = Xdx.$$

Die Function y der Variablen x, welche durch Differenziren das Differential Xdx liefert, heisst das Integral dieses Differentials. Das Integral aus dem gegebenen Differential finden, wird integriren genannt, und durch $\int$ bezeichnet. Wenn

$$dy = Xdx$$

so ist
$$y = \int Xdx$$
und umgekehrt.

Uebrigens muss man, um dem Integrale dieselbe Allgemeinheit und umfassende Bedeutung zu geben, welche das Differential besitzt,

$$y = \int Xdx + C$$

schreiben, wo C eine willkürliche Constante bedeutet. Es giebt also unendlich viele Integrale von Xdx, die sich jedoch alle nur durch verschiedenen Werth der Constante C von einander unterscheiden.

Hat die Constante C irgend einen besonderen Werth angenommen, so heisst das Integral ein besonderes (particuläres). Ist statt C noch nichts Bestimmtes gesetzt worden, so nennt man das Integral, weil es noch alle besonderen in sich schliesst, das allgemeine. — Bei der Anwendung muss die Constante C den übrigen gegebenen Bedingungen des Gegenstandes gemäss bestimmt werden. Der Werth von C ist in einer Aufgabe bestimmt, sobald man den Betrag des Integrals für einen besonderen Werth der Variablen kennt.

§. 66.

Bestimmtes Integral.

Es sei $\int Xdx = f(x) + C$. Weiss man nun aus der Natur des betreffenden Gegenstandes, dass für $x = a$ das Integral $\int Xdx = A$ sein muss; so hat man aus dem allgemeinen Integrale zur Bestimmung der Constante C die Bedingungsgleichung $A = f(a) + C$, daraus $C = A - f(a)$, und man erhält, wenn dieser Werth in das allgemeine Integral substituirt wird, das particuläre Integral $\int Xdx = f(x) - f(a) + A$. — Gewöhnlich oder häufig weiss man, für welchen Werth der Variablen (z. B. $x = a$) das Integral verschwindet ($A = 0$), und wenn man dann $x = b$ setzt, so sagt man, das Integral $\int Xdx$ fange bei $x = a$ an und endige mit $x = b$ (erstrecke sich von $x = a$ bis $x = b$). Die beiden Werthe $x = a$ und $x = b$ heissen auch die Grenzen des Integrals, und wenn diese gegeben sind, so wird das Integral ein bestimmtes (intégrale définie), d. h. innerhalb gegebener Grenzen

genommenes, genannt; oder man sagt, das Integral sei zwischen den Grenzen von $x = a$ bis $x = b$ genommen, was durch $\int_a^b X dx$ bezeichnet wird.

Uebrigens können die Grenzwerthe von x, nämlich a und b, selbst noch Functionen anderer von x unabhängigen Veränderlichen sein.

Das bestimmte, innerhalb gegebener Grenzen zu entwickelnde Integral wird, ohne dass man erst die Constante C zu bestimmen braucht, gefunden, indem man in dem allgemeinen Integrale zuerst $x = b$ (bei welchem Werthe nämlich das Integral enden soll), ferner $x = a$ (wobei es anfangen soll) setzt, und das letztere Resultat vom erstern abzieht; nämlich

$$\int_a^b X dx = f(b) - f(a)$$

das bedeutet:

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a)$$

Dass sich das bestimmte Integral noch von einer anderen Seite auffassen lässt, was oft für die Praxis bequem ist, wollen wir im folgenden Paragraphen betrachten.

§. 67.

Das Integral als Summe.

Da das Differential $\varphi(x)\,dx$ einer stetigen Function $f(x)$ dem Zuwachse dieser Function für einen unendlichkleinen Zuwachs von x gleich ist, so folgt unmittelbar, dass, wenn man die Summe der unzähligen unendlich kleinen Werthe bildet, welche dieses Differential annimmt, während x stetig d. h. nach unendlichkleinen (gleichen oder ungleichen) Differenzen dx vom Werthe a zum Werthe b übergeht, die Summe dieser Werthe nothwendig die Summe der Zuwachse vorstellt, welche die Function $f(x)$ erhält, indem sie vom Werthe $f(a)$ zum Werthe $f(b)$ übergeht, und dass diese Summe folglich dem Gesammtzuwachse $f(b) - f(a)$ dieser Function gleich ist. Nun ist aber diese Differenz gleich dem bestimmten Integrale $\int_a^b f(x)\, dx$. Also ist das bestimmte Integral

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = f(b) - f(a)$$

die Summe aller (unendlich vielen) stetig neben einander liegenden (unendlichkleinen) Werthe des Differentials $\varphi(x)\,dx$, welche zwischen $\varphi(a)\,dx$ und $\varphi(b)\,dx$ liegen. Dabei ist jedoch vorausgesetzt, dass keiner dieser Werthe die Form $\frac{1}{0}$ annimmt, sondern jeder einen völlig bestimmten, nicht unendlichgrossen Werth hat.

Dieser wichtige Satz, dass jede Function als Summe einer unendlichgrossen Anzahl von Werthen ihres Differentials betrachtet werden kann, hat zu dem Zeichen $\int$, als Abkürzung des Wortes Summe, Veranlassung gegeben.

§. 68.

Fundamentalformeln der Integralrechnung.

Die einfachsten Formeln bei Bestimmung des Integrals $\int X dx$ erhält man aus den Differentialformeln der einfachen Functionen durch blosses Umkehren, wie folgende Zusammenstellung von Regeln zeigt:

Die beiden entgegengesetzten Operationszeichen d und $\int$, wo sie zusammen vorkommen, heben sich auf.

Eine Summe von Differentialen wird integrirt, wenn man jedes einzelne Glied integrirt.

Ein constanter Factor lässt sich gleich vor das Integralzeichen setzen.

Ferner ergeben sich die Formeln:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

$$\int \frac{dx}{x} = lx$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{la} a^x; \int e^x dx = e^x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x; \int \cos x dx = \sin x$$

$$\int \frac{dx}{\sin x^2} = -\cot x; \int \frac{dx}{\cos x^2} = \operatorname{tang} x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}\sin x$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc}\,\text{tang}\, x$$

In allen diesen Formeln ist die Constante C hinzuzudenken.

Dies sind die Grundformeln der Integralrechnung.

§. 69.

Verschiedene Methoden der Integration.

Nur bei den Differentialen der einfachen Functionen findet eine unmittelbare Integrirung Statt, wie der vorhergehende Paragraph angiebt.

Zusammengesetztere Differentialausdrücke werden dadurch integrirt (in endlicher Form), dass man sie auf jene einfacheren durch Umformen zurückzuführen sucht, wobei man sich besonders folgender Methoden bedient:

I. Oft kann man einen Differentialausdruck, um ihn zu integriren, in mehrere andere zerlegen, deren Integrale bekannt sind, welches Verfahren die Integration durch Zerlegung heisst.

II. Es ist oft nützlich, eine neue Veränderliche einzuführen. Nämlich wenn man $f(x)dx$ zu integriren hat, und setzt $x=\varphi(z)$, also $dx=\varphi'(z)dz$, so wird der gegebene Ausdruck eine Differentialfunction von der Form: $f[\varphi(z)]\varphi'(z)dz$. Kann man nun diese letzte Function integriren, so braucht man, um das Integral der gegebenen Function zu erhalten, für z nach der Integration nur seinen Werth in x zu setzen. Dieses Verfahren wird das Integriren durch Substitution genannt.

III. Um ein (zusammengesetzteres) Integral auf ein anderes (einfacheres) zu reduciren, bedient man sich sehr oft der Gleichung

$$\int u dv = uv - \int v du$$

welche Formel bei den meisten Reductionen die wichtigste, oft sogar die einzige Rolle spielt. Ueberhaupt ist diese einfache Formel durch das ganze Gebiet der Integralrechnung höchst fruchtbar, und ihre Anwendung wird das theilweise Integriren (intégration par parties) genannt. Diese Gleichung zeigt, dass, wenn das Integral $\int v du$ bereits bekannt ist, daraus auch sofort das Integral $\int u dv$ ab-

geleitet werden kann. Bei diesem Verfahren kommt Alles auf eine schickliche Zerlegung des zu integrirenden Differentialausdruckes in zwei Factoren u und dv an, wo das Integral des Productes vdu bereits bekannt ist.

Um die erwähnte Formel auf die Integration einer Differentialformel $f(x)\,dx$ anzuwenden, muss man $f(x)$ in zwei Factoren $\phi(x)$ und $\psi(x)$ dergestalt zu zerlegen suchen, dass sowohl $\phi(x)\,dx$, als auch, wenn $d\psi(x) = \psi'(x)\,dx$ und $\int \phi(x)\,dx = F(x)$ gesetzt wird, $F(x).\ \psi'(x)\,dx$ entweder unmittelbar, oder doch durch fernere Reductionen integrirt werden kann. Dann ist $\int f(x)\,dx = F(x).\ \psi(x) - \int F(x).\ \psi'(x)\,dx$.

Die Praxis des Integrirens besteht meist darin, die angegebenen drei Integrations-Methoden mit einander geschickt zu verbinden, um nicht blos das Integral wirklich finden zu können, sondern es auch auf dem kürzesten Wege zu erhalten.

Was die Integration in endlicher Form betrifft, so sind die rationalen Differentialformeln die einzigen, welche sich durch ein allgemeines, d. h. für jeden Fall zureichendes, Verfahren integriren lassen; aber über die irrationalen und transcendenten Differentialformeln vermag man, einzelne Fälle ausgenommen, nichts, wenn es nicht gelingt, sie auf eine rationale Form zu bringen, oder überhaupt auf ein bereits bekanntes Integral zurückzuführen.

§. 70.

Integration wichtiger Kreisfunctionen.

Wir wollen uns hier mit der Integration von $\sin x^m \cos x^n\,dx$ und $x^m \sin x\,dx$ beschäftigen. Vorher fügen wir zu den Fundamentalformeln noch folgende sechs ebenso einfache Formeln hinzu:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = l \operatorname{tang} \frac{x}{2};\ \int \frac{dx}{\cos x} = l \operatorname{tang} \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\int \operatorname{tang} x\,dx = -l \cos x;\ \int \cot x\,dx = l \sin x$$

$$\int \sin x \cos x\,dx = \frac{1}{2} \sin x^2;\ \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = l \operatorname{tang} x$$

Man findet diese Integrale auf folgende Art:

$$\int \sin x \cos x\,dx = \int \sin x\,d \sin x = \frac{1}{2} \sin x^2$$

$$\int \operatorname{tang} x\, dx = \int \frac{\sin x\, dx}{\cos x} = -\int \frac{d \cos x}{\cos x} = -l \cos x$$

$$\int \cot x\, dx = -\int \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) d\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = l \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = l \sin x$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos x^2}}{\operatorname{tang} x} = \int \frac{d \operatorname{tang} x}{\operatorname{tang} x} = l \operatorname{tang} x$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = l \operatorname{tang} \frac{x}{2}$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = l \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

Viele Probleme der Integralrechnung lassen sich auf den Ausdruck

$$\int \sin x^m \cos x^n dx$$

zurückführen, wo m und n constante Grössen, und x eine willkürliche Variable bezeichnet. Um dies Integral zu entwickeln, wenden wir die Formel

$$\int u dv = uv - \int v du$$

an, und setzen:

$$u = \cos x^{m+n+2}, \text{ und } dv = \frac{\operatorname{tang} x^m}{\cos x^2} dx$$

woraus folgt:

$$du = -(m+n+2) \cos x^{m+n+1} \sin x dx, \text{ und } v = \frac{1}{m+1} \operatorname{tang} x^{m+1}$$

Substituirt man diese Werthe von u, v, du und dv in der vorhergehenden allgemeinen Gleichung, so erhält man:

(1)
$$\int \sin x^m \cos x^n dx$$
$$= \frac{1}{m+1} \sin x^{m+1} \cos x^{n+1} + \frac{m+n+2}{m+1} \int \sin x^{m+2} \cos x^n dx$$

oder auch umgekehrt, wenn man das letzte Glied dieser Gleichung zuerst setzt:

(2)
$$\int \sin x^{m+2} \cos x^n dx$$
$$= -\frac{1}{m+n+2} \sin x^{m+1} \cos x^{n+1} + \frac{m+1}{m+n+2} \int \sin x^m \cos x^n dx$$

und diese Gleichung (1) oder (2) ist es, welche das gesuchte Integral

$$\int \sin x^m \cos x^n dx$$

für alle ganzen, sowohl positiven als negativen Werthe der Grössen m und n geben wird, mit Voraussetzung der bereits angegebenen einfachen Integralformeln.

Setzt man z. B. in der Gleichung (2) die Grösse $n = 0$, so erhält man

$$\int \sin x^{m+2} dx = -\frac{1}{m+2} \sin x^{m+1} \cos x + \frac{m+1}{m+2} \int \sin x^m dx$$

und daraus bekommt man das Integral von

$$\sin x^{m+2} dx, \text{ für } m = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Setzt man hier $\frac{\pi}{2} - x$ statt x, so erhält man auch die analogen Integrale von

$$\cos x^{m+2} dx, \text{ für } m = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Setzt man ebenso in der Gleichung (2) statt n die Werthe 1, 2, 3, ..., so findet man die Integrale von

$$\sin x^{m+2} \cos x\, dx,\ \sin x^{m+2} \cos x^2 dx,\ \sin x^{m+2} \cos x^3 dx, \ldots$$

wo wieder m nach der Reihe die Zahlen 0, 1, 2, 3, ... bezeichnet.

Wenn man aber in der Gleichung (1) die Grösse m in $-m$ verwandelt, so hat man

$$\int \frac{\cos x^n dx}{\sin x^m} = -\frac{1}{m-1} \frac{\cos x^{n+1}}{\sin x^{m-1}} + \frac{m-n-2}{m-1} \int \frac{\cos x^n dx}{\sin x^{m-2}}$$

Dieser Ausdruck giebt für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ die Integrale von

$$\frac{dx}{\sin x^m}, \frac{\cos x dx}{\sin x^m}, \frac{\cos x^2 dx}{\sin x^m}, \ldots \text{ für } m = 2, 3, \ldots$$

und ebenso erhält man auch für $n = -1, -2, -3, \ldots$ die Integrale von

$$\frac{dx}{\sin x^m \cos x}, \frac{dx}{\sin x^m \cos x^2}, \frac{dx}{\sin x^m \cos x^3}, \ldots \text{ für } m = 2, 3, \ldots$$

Daraus folgen dann wieder durch Verwandlung der Grösse x in $\frac{\pi}{2} - x$ (wodurch Sinus und Cosinus sich vertauschen) die Integrale von

$$\frac{dx}{\cos x^m}, \frac{\sin x dx}{\cos x^m}, \frac{\sin x^2 dx}{\cos x^m}, \ldots \text{ für } m = 2, 3, \ldots$$

und von

$$\frac{dx}{\cos x^m \sin x}, \frac{dx}{\cos x^m \sin x^2}, \ldots \text{ für } m = 2, 3, \ldots$$

Es ist noch zu bemerken, dass das Integral

$$\int \sin x^m \cos x^n dx$$

auch auf die zusammengesetztere Formel

$$\int [\sin (ax+b)]^m [\cos (ax+b)]^n$$

sich anwenden lässt, wo a und b constante Grössen bezeichnen, wenn man nur in der Entwickelung des ersteren Integrals $ax+b$ statt x setzt, und dann das Ganze durch a dividirt.

Die hier entwickelten Integrale sind für viele Anwendungen der Integralrechnung hinreichend.

Wir wollen noch die Ausdrücke

$$x^m \sin x dx \text{ und } x^m \cos x dx$$

integriren. Wenn man in der allgemeinen Gleichung

$$\int u dv = uv - \int v du$$

die Grösse

$$u = x^m \text{ und } dv = \sin x dx$$

also auch

$$du = m x^{m-1} dx \text{ und } v = -\cos x$$

setzt, so erhält man sofort

$$\int x^m \sin x dx = -x^m \cos x + m \int x^{m-1} \cos x dx$$

Setzt man aber

$$u = x^{m-1} \text{ und } dv = \cos x dx$$

so findet man auf dieselbe Weise

$$\int x^{m-1} \cos x dx = x^{m-1} \sin x - (m-1) \int x^{m-2} \sin x dx$$

und ganz ebenso giebt

$$u = x^{m-2} \text{ und } dv = \sin x dx$$

den Ausdruck

$$\int x^{m-2} \sin x dx = -x^{m-2} \cos x - (m-2) \int x^{m-3} \cos x dx$$

Setzt man dieses Verfahren fort, und substituirt dann die einzelnen Integrale in einander, so erhält man:

$$\int x^m \sin x dx = -x^m \cos x + m x^{m-1} \sin x$$
$$+ m(m-1) x^{m-2} \cos x - m(m-1)(m-2) x^{m-3} \sin x - + + \ldots$$

Auf dieselbe Art erhält man auch:

$$\int x^m \cos x dx = x^m \sin x + m x^{m-1} \cos x$$
$$- m(m-1) x^{m-2} \sin x - m(m-1)(m-2) x^{m-3} \cos x + + \ldots$$

Von diesen Reihen ist das Gesetz des Fortganges für sich klar. Beide Ausdrücke gelten für alle Werthe von m; wenn aber m eine ganze positive Zahl ist, welcher Fall am häufigsten vorkommt, so brechen beide Reihen ab, und man erhält die Integrale von

$$x^m \sin x dx \text{ und } x^m \cos x dx$$

in einem endlichen (geschlossenen) Ausdrucke.

Da die Integralformeln dieses Paragraphen Kreisfunctionen enthalten, so wird man, um aus denselben den gehörigen Nutzen zu ziehen, andere zu integrirende Ausdrücke vorher durch Umgestaltung auf Kreisfunctionen zurückzuführen suchen. (Siehe §. 27.)

§. 71.

Integration durch Reihen.

Das Geschäft des Integrirens der Differentialformeln mit einer Variablen besteht in der Reduction derselben auf die einfacheren Differentialformeln, deren Integrale die Fundamentalformeln bilden. Ist dies nicht ausführbar, ist man also nicht im Stande, ein Integral in endlicher (geschlossener) Form, d. h. in einem geschlossenen aus den bis jetzt in die Analysis eingeführten algebraischen und transcendenten Grössen zusammengesetzten Ausdrucke darzustellen; so bleibt nichts übrig, als das Integral durch eine unendliche Reihe auszudrücken, die aber freilich nur dann brauchbar ist, wenn sie convergirt.

Da im Allgemeinen jede Function in eine Reihe entwickelt werden kann, welche nach ganzen Potenzen der Veränderlichen geordnet ist, so kann man das Integral eines gegebenen Differentials in derselben Form darstellen. Denn da man nach der Maclaurinschen Reihe im Allgemeinen hat

$$f(x) = f(0) + f'(0) x + f''(0) \frac{x^2}{2} + f'''(0) \frac{x^3}{2.3} + \ldots$$

so folgt unmittelbar, wenn man jedes Glied mit dx multiplicirt und dann integrirt:

$$\int f(x) dx = C + f(0) x + f'(0) \frac{x^2}{2} + f''(0) \frac{x^3}{2.3} + f'''(0) \frac{x^4}{2.3.4} + \ldots$$

wo C die willkürliche Constante bezeichnet. Dies ist ein allgemeiner

Ausdruck für jedes Integral $\int f(x)\,dx$, aber in Form einer unendlichen Reihe, also häufig in unbequemer Form; diese Reihe kann in allen Fällen angewandt werden, wo sie convergirt.

Es ist diese Reihe nichts Anderes als die Entwickelung von $\int f(x)\,dx$ nach der Maclaurinschen Reihe.

Wenn die Reihe, welche die Entwickelung von $f(x)$ darstellt, convergent ist, so wird die Entwickelung von $\int f(x)\,dx$ noch um so mehr convergiren. Denn die Entwickelung von $f(x)$ kann nur dann convergiren, wenn das Ergänzungsglied $\frac{f^n(\vartheta x)}{2.3.4\ldots n}\,x^n$, wo ϑx ein zwischen 0 und x liegender Werth der veränderlichen Grösse ist, kleiner wird als jede gegebene Grösse, während n immerfort wächst. Es sei nun Q der grösste Werth des Factors $\frac{f^n(\vartheta x)}{2.3.4\ldots n}$, so wird, wenn die genannte Bedingung erfüllt ist, dieselbe auch für die Grösse $Q\frac{x^{n+1}}{n+1}$ stattfinden, und folglich um so mehr für das Ergänzungsglied der Reihe, welche das Integral darstellt.

Um die Entwickelung von $\int f(x)\,dx$ in eine Reihe zu erhalten, braucht man nicht immer $f(x)$ zu entwickeln, wobei man nur Glieder von der Form $ax^n dx$ zu integriren bekommt, sondern man kann auch vorher $f(x)$ in zwei Factoren $\varphi(x).\psi(x)$ zerlegen, und dann einen dieser Factoren, z. B. $\psi(x)$ entwickeln, im Falle dass die Glieder, welche alsdann die Form $ax^n\varphi(x)\,dx$ haben, integrabel sind.

II. Von den bestimmten Integralen.

§. 72.

Summirung durch Integration.

Wir haben bereits den Fundamentalsatz erwähnt:

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} F'(x)\,dx$$

d. h. Ein bestimmtes Integral $\int_{x_0}^{x} F'(x)\,dx$ ist gleich der Summe einer Reihe von (unendlich vielen unendlichkleinen) Gliedern, die

zwischen den bestimmten Grenzgliedern $F'(x_0)\,dx$ und $F'(x)\,dx$ stetig neben einander liegen. Dies wollen wir jetzt noch ausführlicher nachweisen.

Es ist

$$F(x+dx)-F(x)=dF(x)=F'(x)\,dx.$$

Bezeichnen nun $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_n$ eine unendliche Anzahl unendlichkleiner Grössen von der Beschaffenheit, dass ihre Summe

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots+\varepsilon_n=b-a$$

wird, und nimmt man successive für x und dx beziehungsweise die Werthe:

$$a \text{ und } \varepsilon_1,\ a+\varepsilon_1 \text{ und } \varepsilon_2,\ a+\varepsilon_1+\varepsilon_2 \text{ und } \varepsilon_3, \ldots b-\varepsilon_n \text{ und } \varepsilon_n;$$

so erhält man der Reihe nach aus der obigen Gleichung:

$$F(a+\varepsilon_1)-F(a)=F'(a)\,\varepsilon_1$$
$$F(a+\varepsilon_1+\varepsilon_2)-F(a+\varepsilon_1)=F'(a+\varepsilon_1)\,\varepsilon_2$$
$$F(a+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)-F(a+\varepsilon_1+\varepsilon_2)=F'(a+\varepsilon_1+\varepsilon_2)\,\varepsilon_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F(b)-F(b-\varepsilon_n)=F'(b-\varepsilon_n)\,\varepsilon_n$$

und wenn man diese Gleichungen summirt, sofort den Ausdruck: $F(b)-F(a)$, das ist

$$\int_a^b F'(x)\,dx=F'(a)\,\varepsilon_1+F'(a+\varepsilon_1)\,\varepsilon_2$$
$$+F'(a+\varepsilon_1+\varepsilon_2)\,\varepsilon_3+\ldots+F'(b-\varepsilon_n)\,\varepsilon_n$$

Wir wissen also, dass das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

sich als die Grenze betrachten lässt, welcher sich die Summe aller Werthe von $f(x)\,dx$ bei dem Uebergange des x von a in b um so mehr nähert, durch je kleinere Intervalle dabei x fortschreitet. Mit andern Worten: Nimmt man

$$\Delta x=\frac{x-x_0}{n}$$

so convergirt die Summe:

$$F'(x_0)\,\Delta x+F'(x_0+\Delta x)\,\Delta x+F'(x_0+2\Delta x)\,\Delta x+\ldots$$
$$+F'(x^0+[n-1]\,\Delta x)\,\Delta x$$

gegen die Grenze

$$F(x)-F(x_0),$$

wenn man die Zahl n immer grösser und grösser nimmt oder Δx gegen Null convergiren lässt (vorausgesetzt, dass die Function in

dem Intervalle nicht unendlich wird). Oder mit andern Worten: Es ist

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

das Aggregat der Producte, welche man erhält, wenn man die zwischen den Grenzen $x=a$, $x=b$ liegenden Werthe von $f(x)$ mit $\frac{b-a}{n}$ multiplicirt, desto genauer, je grösser n ist, vorausgesetzt, dass $f(x)$ wenigstens zwischen den obigen Grenzen stetig ist.

Es sei $F(x, y)$ eine Function mit zwei unabhängigen Veränderlichen x, y, welche nach der Voraussetzung innerhalb der Grenzen x_0, x und y_0, y immer endliche Werthe behält (also nicht durch das Unendliche geht). Dann kann man zunächst die Summe der unendlichkleinen Werthe von $F(x, y)\,dx$ zwischen den Grenzen x_0, x nehmen, und diese Summe oder das bestimmte Integral

$$\int_{x_0}^{x} F(x, y)\,dx$$

ist alsdann eine gewisse Function von y. Wenn man hierauf die Summe der unendlichkleinen Werthe von

$$\left(\int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx\right)dy$$

zwischen den Grenzen y_0, y nimmt, so hat man ein bestimmtes Doppel-Integral:

$$\int_{y_0}^{y}\left(\int_{x_0}^{x} F(x, y)\,dx\right)dy$$

oder, indem man der Kürze wegen die Klammern weglässt:

$$\int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{x} F(x, y)\,dx dy,$$

welches offenbar gleich der Summe einer Doppelreihe von unendlichkleinen Werthen (der zweiten Ordnung) ist, die alle aus $F(x, y)\,dxdy$ hervorgehen, wenn man darin x von x_0 bis x um unendlichkleine Incremente dx, und y von y_0 bis y um unendlichkleine Incremente dy wachsen lässt. — Mit andern Worten: Wenn man das Intervall $x-x_0$ in m gleiche Theile Δx, und das Intervall $y-y_0$ in n gleiche Theile Δy theilt, und die Summe aller Werthe der Function

$$F(x, y)\,\Delta x \Delta y$$

nimmt, indem man alle Werthe von x in der Reihe:

$$x_0,\ x_0+\Delta x,\ x_0+2\Delta x,\ldots x_0+(m-1)\Delta x$$

mit allen Werthen von y in der Reihe:

$$y_0, y_0 + \Delta y, y_0 + 2\Delta y, \ldots y_0 + (n-1)\Delta y$$

verbindet; so convergirt diese Summe desto mehr gegen eine gewisse Grenze, welche der genaue Werth des Dopppel-Integrales $\int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{x} F(x, y)\,dx dy$ ist, je grösser die Zahlen m und n, oder je kleiner die Differenzen Δx, Δy genommen werden.

Vermöge des für alle Anwendungen der Integralrechnung höchst wichtigen Satzes, dass ein Integral eine Summe von Differentialen (Elementen) ist, dient die Integration zur Summirung von unendlich vielen unendlich kleinen Theilen. Also wird das Integriren angewandt z. B. in der Geometrie: zur Berechnung des Inhaltes von Linien, Flächen und Körpern, als Summen ihrer unendlich kleinen Theile (Elemente); in Physik und Mechanik: zur Bestimmung der Massen (Gewichte) materieller Linien, Flächen und Körper, als Summen ihrer Massen-Elemente; zur Summirung unendlich vieler Kräfte (oder ihrer Momente), die auf stetig nebeneinander liegende Puncte wirken, oder von einem stetigen Systeme von Puncten ausgehen; zur Bestimmung der Wirkung eines Körpers auf einen andern, als Summe der Wirkungen, welche jedes Element des einen auf jedes Element des andern ausübt; zur Summirung einer stetigen Folge von Antrieben (Impulsen) einer Kraft; zur Bestimmung der Arbeit einer Kraft, als Summe ihrer elementaren Wirkungen. U. s. w. Dies Alles geschieht durch Integration zwischen den gehörigen Grenzen.

§. 73.

Mittelwerth einer stetigen Reihe von Grössen.

Da $\int_a^b F(x)\,dx$ gleich ist der Summe der Werthe von $F(a)$ bis $F(b)$, mit $dx = \frac{b-a}{n}$ multiplicirt, wo n unendlich gross ist; so erhält man sogleich die Summe dieser Werthe dividirt durch ihre Anzahl, d. h. ihr arithmetisches Mittel, wenn man jenes Integral noch mit $b - a$ dividirt.

Dadurch kann der mittlere Werth einer stetigen Folge von Grössen gefunden werden. Nämlich es sei y eine Function von x, und in derselben wachse x von a bis b, wodurch eine stetige Folge

von Grössen entsteht, deren Summe gleich Σy, und deren Anzahl gleich dem unendlich grossen n sei. Bedeutet nun M das arithmetische Mittel aus allen diesen unendlich vielen Werthen, so hat man

$$M = \frac{1}{n} \Sigma y$$

Es ist aber $\frac{b-a}{n} = dx$, also $\frac{b-a}{n} \Sigma y = \Sigma y dx = \int_a^b y dx$, weil das Summenzeichen hier in das Integralzeichen übergeht, folglich

$$M = \frac{1}{b-a} \int_a^b y dx$$

Z, B. Wenn y die Temperatur der Erde für den Stundenwinkel x bedeutet, so ist $\int \frac{y dx}{2\pi}$ die mittlere Temperatur eines Tages, wobei die Integration von einem Sonnenaufgang bis zum nächstfolgenden zu nehmen ist.

Ebenso leicht sieht man ein, dass der Quotient

$$\frac{\int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} F(x, y)\, dy dx}{\int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} dy dx} = \frac{\int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} F(x, y)\, dy dx}{(x - x_0)(y - y_0)}$$

das Mittel aus allen unendlich vielen Werthen ausdrückt, welche die Function $F(x, y)$ für alle Werthe von x und y innerhalb der bestimmten Grenzen annimmt.

§. 74.

Sätze von bestimmten Integralen.

I. Die Regel (§. 68), dass ein constanter Factor eines Integrals sich gleich vor das Integralzeichen setzen lässt, gilt auch vom bestimmten Integral.

II. Die Regel (§. 68), dass das Integral einer Summe gleich der Summe aus den Integralen der einzelnen Glieder ist, gilt, wie man leicht sieht, auch für bestimmte Integrale innerhalb derselben Grenzen, und es ist dann keine Constante hinzuzudenken.

III. Wenn man in der Formel (§. 68)

$$\int u dv = uv - \int v du + C$$

wo u und v Functionen von x sind, durchgehends a und dann b statt x schreibt (wodurch C unverändert bleibt), und beide Gleichungen von einander subtrahirt, so erhält man:

$$\int_a^b u dv = u_b v_b - u_a v_a - \int_a^b v du$$

wo die beigefügten a und b leicht zu deuten sind.

IV. Es kommt auf dasselbe hinaus, ob man das Vorzeichen eines bestimmten Integrales ändert, oder die Grenzen desselben vertauscht.

V. Von selbst leuchtet ein, dass man ein bestimmtes Integral in eine Summe von mehreren bestimmten Integralen verwandeln kann, indem man das Intervall der gegebenen Integrations-Grenzen in irgend welche Intervalle zerlegt, und alle Integrale, innerhalb dieser kleineren Intervalle genommen, addirt.

VI. Die uns bekannte Gleichung

$$\int_{x_0}^{x} f'(x)\, dx = f(x) - f(x_0)$$

darf übrigens nebst den aus ihr gezogenen Folgerungen nicht auf die Fälle übertragen werden, wo für einen innerhalb der Integrationsgrenzen enthaltenen Werth von x die Functionen $f'(x)$ oder $f(x)$ unendlich gross werden, welche Fälle eine besondere Untersuchung verlangen. — Will man übrigens den Werth eines bestimmten Integrales $\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\, dx$ finden, während die Function für einen gewissen innerhalb der Integrationsgrenzen liegenden Werth $x = a$ unendlich gross wird, so muss man das Integral in zwei Theile $\int_{x_0}^{a} \varphi(x)\, dx$ und $\int_{a}^{x} \varphi(x)\, dx$ zerlegen, deren Summe das verlangte Integral ist. Haben die beiden einzelnen Integrale einen endlichen Werth, so hat auch das vorgelegte Integral einen bestimmten endlichen Werth; im entgegengesetzten Falle ist der Werth des Integrals entweder unendlich oder unbestimmt. — Aehnlich hat man zu verfahren, wenn es zwischen den beiden Grenzen x_0 und x zwei oder mehrere Werthe giebt, für welche $\varphi(x)$ unendlich gross wird.

VII. Will man in einem bestimmten Integrale unter dem Integralzeichen für die Veränderliche x eine neue Veränderliche z einführen, so muss man zugleich statt der Grenzen a und b solche Grenzen α und β setzen, dass a und α, ebenso auch b und β zusammengehörige Werthe von x und z sind, welche der zwischen x und z vorausgesetzten Gleichung genügen.

§. 75.

Differenziren und Integriren unter dem Integralzeichen.

Es kann Differenziren und Integriren nach mehreren von einander unabhängigen Variablen zusammentreten.

I. Wir haben zu zeigen, wie man eine Grösse unter dem Integralzeichen nach einer andern Variablen, als auf welche sich das Integralzeichen bezieht, differenzirt.

Wenn V eine Function der unabhängigen Variablen x und y bedeutet, so ist

(1) $$\frac{d\int V dx}{dy} = \int \frac{dV}{dy} dx$$

wo aber rechts noch eine beliebige Function von y zu addiren ist. Hier bezieht sich die Integration auf die Veränderliche x, und die Differenzirung auf die von x unabhängige veränderliche Grösse y, und beide Operationen können verwechselt werden, wie die Gleichung (1) ausdrückt, welche man auf folgende Art beweist: Es sei $\int V dx = u$; also $\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{dV}{dy}$, das ist $\frac{d\frac{du}{dy}}{dx} = \frac{dV}{dy}$, demnach $\frac{d\frac{du}{dy}}{dx} dx = \frac{dV}{dy} dx$, und wenn man diese Gleichung nach x integrirt, so erhält man $\frac{dv}{dy} = \int \frac{dV}{dy} dx$, oder $\frac{d\int V dx}{dy} = \int \frac{dV}{dy} dx$. — Das Differenziren unter dem Integralzeichen ist in der Integralrechnung sehr brauchbar.

Z. B. Wenn man die Differentialformel $\phi(x) dx$ mit einer Variablen integriren will, und im Stande ist, das Integral $\int \phi(x) da = \psi(x, a)$, welches in Beziehung auf eine in $\phi(x)$ enthaltene Constante a, als wäre sie veränderlich, x hingegen beständig, genommen wird, mit leichter Mühe anzugeben; so kann man, wenn man bequemer zu rechnen meint, zuerst die Differentialformel $\phi(x, a) dx$ in Bezug auf x integriren, und das erhaltene Resultat sodann in Bezug auf a differenziren; denn nach der Gleichung (1) ist:

$$\frac{d\int \psi(x, a) dx}{da} = \int \frac{d\psi(x, a)}{da} dx = \int \phi(x) dx$$

Wir betrachten nun bestimmte Integrale. Ist V eine Function der absolut Veränderlichen x und y, so ist immer, wenn a und b von y unabhängig sind,

$$(2)\qquad \frac{d\int_a^b V dx}{dy} = \int_a^b \frac{dV}{dy} dx$$

welche Gleichung aus der Gleichung (1) folgt, wenn man in dieser a und dann b statt x setzt und subtrahirt. — Durch Wiederholung dieses Verfahrens würde man analoge Formeln für höhere Differentiale erhalten:

Sind aber die Grenzen a und b von y auf irgend eine Art abhängig, so hat man die Formel:

$$(3)\qquad \frac{d\int_a^b F(x,y)\,dx}{dy} = \int_a^b \frac{dF(x,y)}{dy} dx + F(b,y)\frac{db}{dy} - F(a,y)\frac{da}{dy}$$

welche auf folgende Weise bewiesen wird: Es sei $u = \int_a^b F(x,y)\,dx$; dann ist

$$\frac{du}{dy} = \left(\frac{du}{da}\right)\frac{da}{dy} + \left(\frac{du}{db}\right)\frac{db}{dy} + \left(\frac{du}{dy}\right).$$

Nun hat man:

$$\frac{du}{da} = -F(a,y),\quad \frac{du}{db} = F(b,y);$$

ferner ist $\left(\frac{du}{dy}\right)$, wobei a und b als constant betrachtet werden, gleich

$$\frac{\int_a^b F(x,y+dy)\,dx - \int_a^b F(x,y)\,dx}{dy}, \text{ das ist} \int_a^b \frac{F(x,y+dy) - F(x,y)}{dy} dx,$$

hat also den Werth $\int_a^b \frac{dF(x,y)}{dy} dx$.

II. Es sei wieder V eine Function der unabhängig Veränderlichen x und y. Da die Ordnung der Differenzirungen einer Function zweier veränderlichen Grössen nach diesen Veränderlichen gleichgültig ist, so ergiebt sich daraus leicht, dass auch bei wiederholter Integrirung eine Umkehrung der Ordnung zu gleichen, nur in gewissen Grössen, die blos von x und blos von y abhängen, unterschiedenen Resultaten führt. Es ist nämlich

$$\frac{d^2 \int dy \int V dx}{dx dy} = \frac{d \int V dx}{dx} = V$$

und
$$\frac{d^2 \int dx \int V dy}{dx dy} = \frac{d^2 \int dx \int V dy}{dy dx} = \frac{d \int V dy}{dy} = V,$$

also
$$\frac{d^2 \int dy \int V dx}{dx dy} = \frac{d^2 \int dx \int V dy}{dy dx},$$

und folglich, wenn $\varphi(x)$, $\varphi_1(y)$ zwei willkürliche Functionen, die erste blos von x, die zweite blos von y, bezeichnen:

(4)
$$\int dy \int V dx = \int dx \int V dy + \varphi(x) + \varphi_1(y).$$

Aehnliche Formeln giebt es für Functionen von mehr Veränderlichen.

Wir nehmen nun $\int dy \int V dx$ zwischen den Grenzen $x = a$, $x = b$ und $y = \alpha$, $y = \beta$. Dann ist, wenn a, b, α und β von x und y unabhängig sind:

(5)
$$\int_\alpha^\beta dy \int_a^b V dx = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta V dy$$

was man sogleich einsieht, sobald man das bestimmte Integral als Summe von Differentialen sich denkt. Nämlich ein Doppel-Integral ist als die Summe einer Doppel-Reihe anzusehen, und es ist bei jeder Summe einerlei, in welcher Ordnung man die Theile addirt.

Die Ordnung der Integrationen ist also gleichgültig. Dabei ist aber immer vorausgesetzt, dass die Function V weder unendlich noch unbestimmt wird für irgend einen Werth von x und y zwischen den betrachteten Grenzen; sollte dies eintreten, so wäre eine besondere Untersuchung nöthig.

III. Wir können nun sagen, dass beim wiederholten Differenziren oder Integriren die Folge beliebig ist, sobald nur die Grenzen der Integrale von denjenigen Veränderlichen unabhängig sind, nach welchen das fernere Differenziren oder Integriren geschehen soll (und die Function zwischen den Grenzwerthen der Variablen ihre Stetigkeit nicht unterbricht, also nie $= \frac{1}{0}$ wird).

§. 76.

Wegschaffung von Differentialen hinter dem Integralzeichen.

Wendet man die Formel

$$\int u dv = u dv - \int v du + C$$

zweimal an, so erhält man:

$$\int u d^2 v = u dv - \int (du\, dv) + C$$

und

$$\int (du\, dv) = v du - \int v d^2 u + C_1.$$

folglich $\int u d^2 v = u dv - v du + \int v d^2 u + C_2.$

Wendet man aber dieselbe Formel dreimal hintereinander an, so ergiebt sich:

$$\int u d^3 v = u d^2 v - du\, dv + v d^2 u - \int v d^3 u + C,$$

u. s. w., wo u und v Functionen von x, und alle Differentiationen und Integrationen nach x genommen sind.

Man bedient sich dieser Formeln, um, wenn Ausdrücke von der Form $u d^n v$ integrirt werden sollen, das Integral so umzuformen, dass unter dem Integralzeichen, wenn auch v selbst noch, aber doch kein Differential von v mehr vorkommt.

§. 77.

Die Taylorsche Reihe mit dem Reste.

Die Betrachtung der bestimmten Integrale kann angewandt werden, um sehr einfach und auf dem directesten Wege die Taylorsche Reihe herzuleiten, so wie auch den Rest derselben durch ein bestimmtes Integral auszudrücken. Die dadurch erhaltenen Grenzen der Taylorschen und Maclaurinschen Reihe sind für die Analysis und ihre Anwendungen von der grössten Wichtigkeit.

Man hat für jede Function $F(x)$, wofern sie nur zwischen den Grenzen x und $x+h$ stetig bleibt, immer:

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} F'(x)\, dx$$

wo $F'(x)$ den ersten Differentialquotienten der Function $F(x)$ bezeichnet. Zur besseren Unterscheidung der wirklichen veränderlichen

Grösse x unter dem Integralzeichen von dem in dem Ausdrucke der Grenzen vorkommenden Werthe von x kann man schreiben:

$$F(x+h)-F(x)=\int_x^{x+h} F'(x')\,dx'$$

Nun lässt sich die Veränderliche vertauschen, indem man $x'=x+h-z$ setzt, wo z eine neue Veränderliche bezeichnet, also $dx'=-dz$, wodurch dieses Integral zu

$$-\int_h^0 F'(x+h-z)\,dz, \text{ oder } \int_0^h F'(x+h-z)\,dz$$

wird, so dass man hat:

$$F(x+h)-F(x)=\int_0^h F'(x+h-z)\,dz.$$

Dies vorausgeschickt, wenden wir nun auf das unbestimmte Integral

$$\int F'(x+h-z)\,dz$$

das theilweise Integriren an, wodurch man nach und nach findet:

$$\int F'(x+h-z)\,dz = zF'(x+h-z)+\int zF''(x+h-z)\,dz$$

$$\int zF''(x+h-z)\,dz=\frac{z^2}{2}F''(x+h-z)+\int\frac{z^2}{2}F'''(x+h-z)\,dz$$

u. s. w.

und folglich

$$\int F'(x+h-z)\,dz = zF'(x+h-z)+\frac{z^2}{2}F''(x+h-z)+\ldots$$
$$+\frac{z^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)}F^{n-1}(x+h-z)+\int\frac{z^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)}F^{n}(x+h-z)\,dz$$

Nimmt man also das Integral zwischen den Grenzen 0 und h, so kommt:

$$\int_0^h F'(x+h-z)\,dz = hF'(x)+\frac{h^2}{2}F''(x)+\ldots$$
$$+\frac{h^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)}F^{n-1}(x)+\int_0^h\frac{z^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)}F^{n}(x+h-z)\,dz$$

und durch Substitution dieses Werthes in die obige Gleichung erhält man schliesslich:

$$F(x+h)=F(x)+hF'(x)+\frac{h^2}{2}F''(x)+\ldots\frac{h^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)}F^{n-1}(x)$$
$$+\frac{1}{2.3\ldots(n-1)}\int_0^h z^{n-1}F^n(x+h-z)\,dz$$

Wenn man in dieser Gleichung $x=0$ macht, und dann x statt h schreibt, so hat man:

$$F(x)=F(0)+xF'(0)+\frac{x^2}{2}F''(0)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)}F^{n-1}(0)$$
$$+\frac{1}{2.3\ldots(n-1)}\int_0^x z^{n-1}F^n(x-z)\,dz$$

Wir haben also als Ergänzungsglied (Rest) der Taylorschen Reihe, wenn n Glieder genommen werden,

$$\frac{1}{2.3\ldots(n-1)}\int_0^h z^{n-1}F^n(x+h-z)\,dz$$

Dieses bestimmte Integral drückt genau den Fehler aus, den man begeht, wenn man die Taylorsche Reihe beim n^{ten} Gliede abbricht; aber es enthält die Schwierigkeit der Integration, und man muss sich daher im Allgemeinen begnügen, diesen Fehler zwischen zwei bekannte Grenzen einzuschliessen. Zu diesem Zwecke giebt man dem Ergänzungsgliede eine andere Form. Es ist nämlich das bestimmte Integral gleich der Summe der Factoren $z^{n-1}dz$, multiplicirt mit einem mittleren Werthe zwischen dem kleinsten und grössten, welchen $F^n(x+h-z)$ annimmt, wenn z von 0 in h übergeht; und da diese Function continuirlich vorausgesetzt wird, so ist dieser mittlere Werth einer von den Werthen, welche $F^n(x+h-z)$ für einen bestimmten zwischen 0 und h enthaltenen Werth des z annimmt; woraus auch für $h-z$ ein Werth zwischen 0 und h folgt, den wir durch ϑh vorstellen. Das Ergänzungsglied der Taylorschen Reihe wird daher, wenn man die n ersten Glieder nimmt:

$$\frac{F^n(x+\vartheta h)}{1.2.3\ldots(n-1)}\int_0^h z^{n-1}dz$$

oder $\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}F^n(x+\vartheta h)$, das ist $\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}\frac{d^nF(x+\vartheta h)}{dx^n}$

wo $\frac{d^nF(x+\vartheta h)}{dx^n}$ einen Werth von $\frac{d^nf(x)}{dx^n}$ bedeutet, welcher erhalten wird, wenn man $x+\vartheta h$ statt x setzt, wo ϑ unbekannt ist, aber zwischen 0 und 1 liegt. — Nimmt man den kleinsten und grössten der Werthe von $F^n(x)$ in dem Intervalle von x bis zu $x+h$,

so hat man zwei Grenzen, zwischen welchen der Rest (oder Fehler) der Taylorschen Reihe, wenn man sie bei dem n^{ten} Gliede abbricht, das ist die Summe aller übrigen Glieder liegen muss. Nämlich wenn durch P und Q jener kleinste und grösste Werth bezeichnet wird, so ist der Rest, wenn man die n ersten Glieder der Taylorschen Reihe nimmt, grösser als $\frac{Ph^n}{1.2\ldots n}$ und kleiner als $\frac{Qh^n}{1.2.3\ldots n}$.

Demnach erhält man die Taylorsche und Maclaurinsche Reihe mit der Ergänzung, wenn die Reihen bei irgend einem Gliede abgebrochen werden, wie folgt:

$$* \; F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{2}F''(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)}F^{n-1}(x) + \frac{h^n}{2.3\ldots n}F^n(x+\vartheta h)$$

$$* \; F(x) = F(0) + xF'(0) + \frac{x^2}{2}F''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)}F^{n-1}(0) + \frac{x^n}{2.3\ldots n}F^n(\vartheta x)$$

wo ϑ eine positive, die Einheit nicht übersteigende Zahl anzeigt.

Zufolge der Herleitung der Taylorschen Reihe kann dieselbe nur dann für $F(x+h)$ gesetzt werden, wenn $F(x)$ und alle ihre Differentialquotienten zwischen x und $x+h$ continuirlich sind, und wenn der Ausdruck $\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}F^n(x+\vartheta h)$ Null zur Grenze hat, sobald n unendlich wächst. — Es ist übrigens leicht zu erkennen, dass dieses Glied, welches den Rest der Reihe nach den n ersten Gliedern angiebt, immer der Null sich nähert, wenn $F^n(x+\vartheta h)$ endlich bleibt, während n unendlich wächst; denn der Factor

$$\frac{h^n}{1.2.3\ldots n} = h\frac{h}{2}\frac{h}{3}\frac{h}{4}\cdots\frac{h}{n}$$

nähert sich nothwendig der Null, was auch h sein mag, wenn n immer grösser wird. Die Taylorsche Reihe ist also brauchbar, sobald $F(x)$ und alle ihre Differentialquotienten endlich und stetig sind zwischen x und $x+h$. — Die Maclaurinsche Reihe ist brauchbar, wenn die Function $F(x)$ und ihre Differentialquotienten stetig sind zwischen 0 und x, und der Ausdruck $\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}F^n(\vartheta x)$ sich der Null nähert, während n unendlich wächst.

Um die Taylorsche Reihe auf eine Function von zwei Veränderlichen zu erweitern, d. h. $F(x+h, y+k)$ nach ganzen positiven

Potenzen von h und k zu entwickeln, kann man $F(x+ht, y+kt)$ nach den Potenzen von t vermittelst der Maclaurinschen Reihe entwickeln, und hierauf $t=1$ setzen. Dann ergiebt sich aus dem Vorhergehenden, dass der Rest der Reihe, indem man bei den Gliedern irgend einer Ordnung abbricht, erhalten wird, wenn man in diesen Gliedern $x+\vartheta h$ statt x, und $y+\vartheta k$ statt y setzt, wo ϑ eine Zahl zwischen 0 und 1 bedeutet. Daraus erhält man die Grenzen des Restes, wenn man dem ϑ die Werthe giebt, welche den Ausdruck des Restes am grössten und am kleinsten machen. Uebrigens müssen alle Differentialquotienten stetig sein zwischen $x+h$ und $y+k$. Die unendliche Reihe ist brauchbar, wenn der Rest sich der Null nähert. — Setzt man hier $x=0$ und $y=0$, und schreibt sodann x, y statt h, k, so erhält man den Rest der Reihe, wenn man in diesen Gliedern ϑx, ϑy statt x, y setzt. Giebt man dem ϑ die Werthe, welche den Ausdruck des Restes so gross und so klein wie möglich machen, so bekommt man die Grenzen der Reihe. Wenn der Rest sich der Null nähert beim Wachsen von n, so ist die unendliche Reihe brauchbar.

Aehnlich verfährt man bei Functionen von noch mehr Veränderlichen.

§. 78.

Andere Form für den Rest der Taylorschen Reihe.

Es ist zuweilen nützlich, das Ergänzungsglied der Taylorschen und Maclaurinschen Reihe unter einer anderen Form darzustellen, wie folgt.

Betrachtet man zuerst die Entwickelung von $F(x)$, so kann man, indem $z+(x-z)$ statt x substituirt wird, setzen:

$$F(x)=F(z)+(x-z)F'(z)+\frac{(x-z)^2}{1.2}F''(z)+\ldots$$
$$+\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{n-1}(z)+\frac{(x-z)^n}{1.2\ldots n}F^n[z+\vartheta(x-z)]$$

Wenn man das letzte Glied durch $\varphi(z)$ bezeichnet, und beide Seiten der Gleichung nach z differenzirt, so erhält man, nach beendigter Reduction,

$$0=\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^n(z)+\varphi'(z)$$

Diese Gleichung bestimmt den Differentialquotienten von $\varphi(z)$, und giebt

$$\varphi(z) = -\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^n(z).$$

Aber nach der Taylorschen Reihe, wenn man diese auf zwei Glieder beschränkt, und beachtet, dass $z = x + (z-x)$, hat man:

$$\varphi(z) = \varphi(x) + (z-x)\,\varphi'[x + \vartheta_1(z-x)]$$

wo ϑ_1 eine zwischen Null und 1 enthaltene Grösse bedeutet. Mittelst dieser Formel kann man nun $\varphi(z)$ durch $\varphi'(z)$ ausdrücken, indem man beachtet, dass $\varphi(x) = 0$ ist. Die letzte Gleichung giebt dann

$$\varphi(z) = \frac{(x-z)^n}{1.2\ldots(n-1)} (\vartheta_1)^{n-1} F^n [x + \vartheta_1(z-x)]$$

wodurch man für den Rest der Reihe, welche $F(x)$ entwickelt, einen neuen Ausdruck erhält.

Setzt man $z = 0$, so hat man die Maclaurinsche Reihe unter der folgenden Form, indem man $1 - \vartheta_1 = \vartheta$ macht:

$$* \; F(x) = F(0) + xF'(0) + \frac{x^2}{1.2} F''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^{n-1}(0) + \frac{x^n(1-\vartheta)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^n(\vartheta x)$$

wo ϑ zwischen 0 und 1 enthalten ist. Früher wurde der Rest durch $\frac{x^n}{1.2\ldots n} F^n(\vartheta x)$ ausgedrückt, wo ϑ einen andern Bruch vorstellt. Die neue Form dieses Restes ist zuweilen geeigneter, um die Convergenz der Maclaurinschen Reihe zu erweisen.

Wenn man in der letzten Formel $F(x) = f(h+x)$ setzt, so hat man

$$f(h+x) = f(h) + xf'(h) + \frac{x^2}{1.2} f''(h) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{n-1}(h) + \frac{x^n(1-\vartheta)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^n(h + \vartheta x)$$

oder, wenn man die Buchstaben h und x mit einander vertauscht,

$$* \; f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{n-1}(x) + \frac{h^n(1-\vartheta)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^n(x + \vartheta h)$$

welches die Taylorsche Reihe ist, wo der Rest unter einer neuen Form sich darstellt.

§. 79.

Convergenz der Reihen für die einfachen Functionen.

Wir haben nun im Vorhergehenden ein Hülfsmittel erhalten, die Convergenz solcher Reihen zu beurtheilen, welche aus der Taylorschen oder Maclaurinschen Reihe hervorgegangen sind. Eine Reihe convergirt, wenn der Werth des ergänzenden Gliedes kleiner wird als jede gegebene Grösse, während man die Gliederzahl ohne Aufhören wachsen lässt. Wir wenden jetzt die vorhergehenden Formeln auf wichtige Beispiele an.

I. Es sei $F(x) = (1+x)^m$. Dann erhält man, wenn der Rest der Reihe in Rechnung gebracht wird,

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \dots$$
$$+ \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n}x^n(1+\vartheta x)^{m-n}$$

wo ϑ eine zwischen 0 und 1 enthaltene Zahl bezeichnet. Diese Reihe wird, wenn man $n = \infty$ werden lässt, zu einer unendlichen Reihe, deren Convergenz untersucht werden muss. Das Verhältniss des p^{ten} Gliedes zum vorhergehenden ist $\frac{m-p+1}{p}x$, und nähert sich der Grösse $-x$ in dem Maase als p sich vergrössert; also ist die Reihe nicht convergent, wenn x ausserhalb der Grenzen $+1$ und -1 liegt. Es genügt also zu erforschen, ob der Rest der Null sich nähert für alle zwischen diesen Grenzen enthaltenen Werthe von x. Dieser Rest lässt sich in die zwei Factoren

$$\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n}x^n \text{ und } (1+\vartheta x)^{m-n}$$

zerlegen. Der erste Factor nähert sich der Null, weil er, wenn n um eine Einheit wächst, multiplicirt wird mit $\frac{m-n}{n+1}x$, welches sich immer mehr dem $-x$, dessen absoluter Werth kleiner als die Einheit ist, nähert; der zweite Factor $\frac{(1+\vartheta x)^m}{(1+\vartheta x)^n}$ nähert sich, wenn man vorerst x positiv annimmt, auch der Null, wofern nicht ϑ der Null ins Unendliche sich nähert; aber in allen Fällen bleibt dieser Factor kleiner als die Einheit, und folglich nähert sich der Rest der Reihe der Null. Also convergirt die Reihe für alle Werthe von x zwischen 0 und $+1$. — Aber wenn x negativ ist, so wäre mög-

lich, dass der zweite Factor mit n ins Unendliche wächst, und dies wird wirklich eintreten, wofern nicht ϑ der Null sich nähert; denn der Ausdruck $(1+\vartheta x)^n$ würde sich der Null nähern, wenn nicht der Bruch $1+\vartheta x$ sich ins Unendliche der Einheit näherte. Hier muss man zu der andern Form des Restes, welche

$$\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)x^n(1-\vartheta)^{n-1}}{1.2\dots(n-1)}(1+\vartheta x)^{m-n}$$

ist, seine Zuflucht nehmen. Der Factor $\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots(n-1)}$ nähert sich noch der Null; der andere Factor wird, wenn man $-z$ statt x setzt,

$$(1-\vartheta z)^{n-1}\left(\frac{1-\vartheta}{1-\vartheta z}\right)^{n-1}.$$

Nun ist $\frac{1-\vartheta}{1-\vartheta z}<1$, weil $z<1$; also wird $\left(\frac{1-\vartheta}{1-\vartheta z}\right)^{n-1}$ der Null sich nähern, wofern nicht ϑ auch der Null sich nähert, und selbst in diesem Falle ist dieser Ausdruck immer kleiner als die Einheit, ebenso wie $(1-\vartheta z)^{m-1}$. Also der Rest der Reihe nähert sich der Null. — Demnach convergirt die Binomialreihe für alle Werthe von x, die zwischen $+1$ und -1 enthalten sind.

II. Es sei $F(x)=l(1+x)$. Dann hat man:

$$l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots\pm\frac{x^n}{n}(1+\vartheta x)^{-n}$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem n ungerade oder gerade ist. Die Glieder der Reihe würden ins Unendliche wachsen, wenn $x>1$ wäre, weil das Verhältniss eines Gliedes zum vorhergehenden gleich $\frac{n}{n+1}x$, und dessen Grenze gleich x ist, wenn n ins Unendliche wächst. Es genügt also zu untersuchen, ob der Rest der Null sich nähert, wenn $x<1$, wobei man zwei Fälle unterscheiden muss. Wenn x positiv ist, so hat man $\frac{x}{1+\vartheta x}<1$, wofern $x<1$; also nähert der Rest sich der Null, und die Reihe convergirt gegen $l(1+x)$. — Wenn x negativ ist gleich $-z$, so stellt sich der Rest $\frac{z^n}{n(1-\vartheta z)^n}$ in keiner geeigneten Form dar, um zu erkennen, ob er sich der Null nähert; weil man nicht weiss, ob Zähler oder ob Nenner des Bruches $\frac{z}{1-\vartheta z}$ grösser ist. Aber nimmt man die an-

dere Form des Restes, so findet man hier $\frac{x^n(1-\vartheta)^{n-1}}{(1+\vartheta x)^n}$, oder, vom Zeichen abgesehen,

$$\left(\frac{z-\vartheta z}{1-\vartheta z}\right)^{n-1} \cdot \frac{z}{1-\vartheta z}.$$

Da nun der Bruch $\frac{z-\vartheta z}{1-\vartheta z}$ kleiner als die Einheit ist, wenn $z < 1$, so nähert der Rest sich der Null. — Die logarithmische Reihe ist also convergent, wenn x zwischen $+1$ und -1 liegt.

III. Es sei $F(x) = a^x$. Dann erhält man:

$$a^x = 1 + xla + \frac{x^2 l a^2}{2} + \frac{x^3 l a^3}{2.3} + \ldots + \frac{x^n l a^n}{2.3\ldots n} a^{\vartheta x}$$

Der Rest $\frac{x^n l a^n}{2.3\ldots n} a^{\vartheta x}$ kommt der Null immer näher, wenn n immer grösser wird; denn wenn man ein Glied mehr nimmt, so ist der Rest gleich dem vorhergehenden, multiplicirt mit $\frac{xla}{n+1}$. Also convergirt die Exponentialreihe für jedes x.

IV. In den Reihen für Sinus und Cosinus nehmen, wie gross auch x sein mag, doch die Glieder endlich immerfort ab, und da sie abwechselnd positiv und negativ werden, so sind diese Reihen stets convergent. Man kann auch sagen, dass diese Reihen deshalb immer convergiren, weil sie aus den immer convergenten Exponentialreihen blos durch Addition und Subtraction zusammengesetzt sind.

§. 80.

Anwendung der bestimmten Integrale bei Beurtheilung der Convergenz einer Reihe.

Wir wollen hier eine Regel für die Convergenz der Reihen angeben, welche aus der Betrachtung der bestimmten Integrale abgeleitet ist.

Die Reihe sei

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots,$$

deren sämmtliche Glieder, von einem bestimmten Werthe des n bis ins Unendliche, positiv sind und beständig abnehmen, indem sie der Grenze Null sich nähern. Die Reihe ist convergent oder divergent, je nachdem die Summe der Glieder, von diesem Werthe des n aus, einer endlichen Grenze sich nähert oder nicht. — Der Ausdruck u_n

des allgemeinen Gliedes sei eine Function in endlicher Form von n, und werde durch u_x als Function von x bezeichnet, indem wir x statt n schreiben. Aus dieser Function gehen alle Glieder der gegebenen Reihe hervor, wenn man dem x alle ganzen und positiven Werthe giebt. Da der Werth von u_x in ein beständiges Abnehmen kommt, wenn man x um Einheiten wachsen lässt von einem bestimmten ganzen Werthe aus, so wird u_x in ein beständiges Abnehmen kommen, auch wenn x stetig von einem bestimmten Werthe bis ins Unendliche wächst. Sobald dies von dem ganzen Werthe m an eintritt, hat man:

$$u_m > \int_m^{m+1} u_x\,dx,\quad u_{m+1} > \int_{m+1}^{m+2} u_x\,dx,\quad u_{m+2} > \int_{m+2}^{m+3} u_x\,dx,\ldots$$

und

$$u_{m+1} < \int_m^{m+1} u_x\,dx,\quad u_{m+2} < \int_{m+1}^{m+2} u_x\,dx,\quad u_{m+3} < \int_{m+2}^{m+3} u_x\,dx,\ldots$$

woraus sich ergiebt, wenn man respective diese zwei Reihen von Ungleichheiten addirt, Glied zu Glied,

$$\int_m^{\infty} u_x\,dx < u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots$$

und

$$\int_m^{\infty} u_x\,dx > u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots$$

Jenachdem nun dieses Integral $\int_m^{\infty} u_x\,dx$ endlich oder unendlich ist, wird auch die Reihe, von u_{m+1} an, eine endliche Summe haben oder nicht. Demnach ist die gegebene Reihe convergent oder divergent, jenachdem das Integral

$$\int_m^{\infty} u_x\,dx$$

endlich oder unendlich ist.

Z. B. Wir untersuchen die Reihe

$$\frac{1}{1^a} + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \ldots + \frac{1}{n^a} + \ldots$$

Hier ist die Function u_x gleich $\frac{1}{x^a}$, und kommt ins beständige Abnehmen, wenn

x wächst, vorausgesetzt, dass a positiv ist. Nun ist $\int \frac{dx}{x^a} = \frac{x^{1-a}}{1-a}$, also wird $\int_m^\infty \frac{dx}{x^a}$ unendlich, wenn $a < 1$, und endlich, wenn $a > 1$. Ist $a = 1$, so hat man $\int \frac{dx}{x^a} = \int \frac{dx}{x} = lx$, welche Grösse zugleich mit x unendlich wird. Also ist die gegebene Reihe convergent, wenn $a > 1$; und divergent, wenn $a < 1$ oder $a = 1$.

§. 81.

Function und bestimmtes Integral in allgemeinerer Bedeutung. Fouriersche Reihen.

Bei wichtigen Anwendungen der Mathematik auf Mechanik und Physik (z. B. in der Untersuchung über die Gestalt schwingender Saiten und in der mathematischen Theorie der Wärme) ist man sehr häufig zu einer allgemeineren Auffassung einer Function $y = f(x)$, und ebenso eines bestimmten Integrales von $y\,dx$ genöthigt (z. B. wenn $y = f(x)$ die ursprüngliche Gestalt einer schwingenden Saite, oder die zur Zeit Null vorhandene Wärmevertheilung in den durch die Abscissen bestimmten Schichten eines Körpers bezeichnet).

Wir betrachten hier eine Function $y = f(x)$ innerhalb eines bestimmten Intervalles von $x = a$ bis $x = b$. Zwar soll die Function innerhalb dieses Intervalles stetig sein, aber damit ist nicht gesagt, dass y in diesem ganzen Intervalle immer nach einem und demselben Gesetze von x abhängig sei, sondern es kann stattfinden, dass in verschiedenen Theilen jenes Intervalles das y auf verschiedene Weise aus x gebildet sei, z. B. $f(x)$ soll von $x = a$ bis $x = m$ eine bestimmte Function, von $x = m$ bis zu $x = n$ eine andere, und von $x = n$ bis zu $x = b$ eine dritte Function sein, wo $a < m < n < b$ vorausgesetzt wird. Ja, was noch mehr ist, man braucht nicht einmal an eine durch mathematische Operationen ausdrückbare Abhängigkeit des y von x zu denken, so dass man unter $y = f(x)$ weiter nichts versteht, als dass jedem bestimmten x zwischen a und b ein bestimmtes endliches y entspricht, gleichviel wo man das Letztere herbekommen hat. Jenachdem $f(x)$ innerhalb eines Intervalles ein einziges, oder hintereinander mehrere verschiedene Gesetze befolgt, wollen wir die Function regulär oder irregulär nennen; wir sagen also hier „irregulär" statt des sonst gebräuchlichen, aber Irrung veranlassenden Wortes „discontinuirlich".

Wenn man nun ein bestimmtes Integral durch die Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

definirt, so setzt man voraus, dass eine Function $\varphi(x)$ existire, welche wenigstens innerhalb des Intervalles $x = a$ bis $x = b$ die Eigenschaft

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x)$$

besitzt. Dies würde aber mit einer angenommenen Regellosigkeit von $f(x)$ unverträglich sein. Deshalb halten wir uns hier an die allgemeinere Definition des bestimmten Integrales, wonach $\int_a^b f(x)\,dx$ als die Summe aller Werthe von $f(x)\,dx$ zwischen den Grenzen $f(a)\,dx$ und $f(b)\,dx$ erscheint. Diese letztere Erklärung passt auch auf alle irregulären Functionen $f(x)$.

Wollte man nun $f(x)$ in eine Reihe entwickeln, die nach Potenzen von x oder $x - \alpha$ fortlauft, so würden die Coefficienten nur dann dieselben bleiben, wenn $f(x)$ continuirlich eine und dieselbe Function bleibt; aber so wie die Function eine andere wird, würden auch die Coefficienten anders werden. Sodann müsste man beweisen können, dass diese Reihen convergiren. — Diesem Uebelstande wird nun auf einfache Weise dadurch abgeholfen, dass man eine Reihe sucht, deren Glieder nach Sinus oder Cosinus der Vielfachen von x fortlaufen. Nämlich es gilt der folgende wichtige Satz:

Jede beliebige, reguläre oder irreguläre Function $f(x)$ einer veränderlichen Grösse x lässt sich in eine unendliche Reihe entwickeln, die nach Sinus oder Cosinus der Vielfachen von x fortlauft, und convergent ist.

Wir haben nun die folgenden Aufgaben zu lösen.

I. Man soll eine beliebig gegebene Function $f(x)$ in eine nach den Sinus der Vielfachen von x fortlaufende Reihe entwickeln. — Zu diesem Zwecke wende man die Methode der unbestimmten Coefficienten an, setze daher zuerst

$$f(x) = A_1 \sin x + A_2 \sin 2x + A_3 \sin 3x + \ldots$$

(wo $A_1, A_2, A_3, \ldots$ von x unabhängige Grössen bezeichnen), und suche nun die unbestimmten Coefficienten $A_1, A_2, A_3, \ldots$ zu bestimmen. Dabei denke man daran, dass wenn m und n zwei beliebige ganze Zahlen vorstellen, dann immer

$$\int_0^\pi \sin mx \sin nx\,dx = 0 \text{ ist, so oft } m \gtrless n,$$

dagegen, wenn m = n sein sollte,

$$\int_0^\pi \sin mx \sin nx dx = \int_0^\pi (\sin nx)^2 dx = \frac{1}{2}\pi \text{ ist.}$$

Es ist nämlich

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\cos(m-n)x - \frac{1}{2}\cos(m+n)x$$

und diese Formel geht für m = n in

$$(\sin nx)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2nx$$

über. Daher ist

$$\int \sin mx \sin nx dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}$$

so lange m von n verschieden ist; dagegen für m = n

$$\int (\sin nx)^2 dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4n}\sin 2nx.$$

Man wird nun die angenommene Gleichung nach und nach mit $\sin x dx$, $\sin 2x dx$, $\sin 3x dx, \dots$ multipliciren, und jede dieser entstehenden Gleichungen nach x zwischen den Grenzen 0 und π integriren. Dann erhält man nach und nach:

$$\int_0^\pi \sin x f(x)\, dx = \frac{1}{2}\pi A_1$$

$$\int_0^\pi \sin 2x f(x)\, dx = \frac{1}{2}\pi A_2$$

$$\int_0^\pi \sin 3x f(x)\, dx = \frac{1}{2}\pi A_3$$

u. s. w.,

so dass hieraus die unbestimmten Coefficienten A_1, A_2, $A_3, \dots$ gefunden werden, in bestimmte Integrale ausgedrückt. Man hat folglich zuletzt:

$$f(x) = A_1 \sin x + A_2 \sin 2x + A_3 \sin 3x + \dots$$

wo

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nx f(x)\, dx$$

das ist

(1) $$f(x) = \frac{2}{\pi}\Sigma\left[\sin nx \int_0^\pi \sin nx f(x)\, dx\right]$$

wo Σ die Summe aller unendlich vielen Glieder bedeutet, welche aus dem allgemeinen Gliede (in der Klammer) hervorgehen, wenn man

statt n nach und nach Null und alle positiven ganzen Zahlen setzt (das allererste Glied, wo $n=0$ gesetzt wird, wird aber selbst der Null gleich).

II. Man soll $f(x)$ in eine Reihe verwandeln, die nach Cosinus der Vielfachen von x fortlauft. — Zu diesem Zwecke setze man

$$f(x) = B_0 + B_1 \cos x + B_2 \cos 2x + B_3 \cos 3x + \ldots,$$

multiplicire diese Gleichung mit $\cos 0dx$, $\cos xdx$, $\cos 2xdx$, $\cos 3xdx, \ldots$, und integrire nach x zwischen den Grenzen 0 und π. Dadurch erhält man:

$$\int_0^\pi f(x)\,dx = B_0\pi, \text{ also } B_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx$$

und noch, wenn n jede positive ganze Zahl vorstellt,

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos nx f(x)\,dx.$$

Daher hat man zuletzt:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx + \frac{2}{\pi}\Sigma\left[\cos nx \int_0^\pi \cos nx f(x)\,dx\right],$$

wo jedoch der Werth Null von n ausgeschlossen bleibt; oder man hat:

$$f(x) = \frac{1}{2}B_0 + B_1 \cos x + B_2 \cos 2x + B_3 \cos 3x + \ldots$$

wo $B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos nx f(x)\,dx$, und $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

gesetzt wird, das ist

$$(2) \qquad f(x) = \frac{2}{\pi}\Sigma\left[\cos nx \int_0^\pi \cos nx f(x)\,dx\right]$$

wenn man statt n nach und nach Null und alle ganzen Zahlen setzt, aber von dem für $n = 0$ hervorgehenden Gliede nur die Hälfte nimmt.

III. In den Gleichungen (1) und (2) stellt $f(x)$ eine ganz willkürliche Function, sogar eine Reihe völlig gesetzloser Werthe vor, so dass die nach Sinus oder Cosinus der vielfachen x fortlaufenden Reihen irreguläre Functionen eben so gut als reguläre darstellen. Es lässt sich beweisen (wie Dirichlet gethan), dass für alle Werthe von x zwischen 0 und π die Reihen in (1) und (2) convergiren, und diese Gleichungen gültig sind. — Ferner ist zu bemerken: Die Gleichung (1) gilt auch noch für alle negativen Werthe von x, die zwischen 0 und $-\pi$ liegen, so oft statt $f(x)$ eine solche (reguläre

oder irreguläre) Function $\varphi(x)$ gesetzt wird, welche die Eigenschaft hat, dass $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ ist. Die Gleichung (2) gilt dagegen auch noch für alle negativen Werthe von x, welche zwischen 0 und $-\pi$ liegen, aber wenn statt $f(x)$ eine andere Function $\psi(x)$ gesetzt wird, welche die andere Eigenschaft hat, dass $\psi(-x) = \psi(x)$ ist. Auf diese einfache Bemerkung kann man eine Reihe gründen, welche die Reihen (1) und (2) als besondere Fälle in sich begreift, und eine von $x = -\pi$ bis $x = \pi$ ganz willkürlich gegebene Function $f(x)$ darzustellen geeignet ist. Nämlich setzt man, während $f(x)$ jede beliebige Function vorstellt,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2} f(-x) \text{ und } \psi(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(-x),$$

so ist

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x).$$

Findet man nun $\varphi(x)$ aus (1) und $\psi(x)$ aus (2), so folgt:

$$(3) \qquad f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} B_0 + B_1 \cos x + B_2 \cos 2x + B_3 \cos 3x + \ldots \\ \qquad + A_1 \sin x + A_2 \sin 2x + A_3 \sin 3x + \ldots \end{array} \right\}$$

wo die Coefficienten durch die Gleichungen

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx \, [f(x) + f(-x)] \, dx$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, [f(x) - f(-x)] \, dx$$

zu bestimmen sind. Man kann diesen Ausdrücken eine einfachere Form geben. Nämlich zerlegt man B_n in zwei Integrale, und führt $z = -x$ in $\int_0^{\pi} \cos nx \, f(-x) \, dx$ ein, so verwandelt sich dies in

$$-\int_0^{-\pi} \cos nz \, f(z) \, dz, \text{ d. h. in } -\int_0^{-\pi} \cos nx \, f(x) \, dx$$

$= \int_{-\pi}^{0} \cos nx \, f(x) \, dx$. Aehnliches gilt für A_n. Daher ergiebt sich

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \, f(x) \, dx$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx \, f(x) \, dx$$

Die Reihen (1), (2), (3) werden die Fourierschen Reihen genannt, weil Fourier zuerst ihre hohe Wichtigkeit in der mathe-

matischen Physik geltend gemacht, und ihre Natur näher kennen gelehrt hat. Dies Verfahren, ganz willkürliche (reguläre sowohl als irreguläre) Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen, mittelst bestimmter Integrale, gleichmässig darzustellen, hat zur Erweiterung und Vervollkommnung der Analysis wesentlich beigetragen, und findet zahlreiche Anwendungen.

§. 82.

Fouriersche Formel.

Diese Formel, welche bei den Anwendungen der Analysis auf Physik von Wichtigkeit ist, lehrt, jede Function in ein bestimmtes Doppelintegral zu verwandeln; dabei kann die Function auch irregulär sein. Die Formel ist

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, dt \int_{0}^{\infty} \cos p\,(x-t).\, dp$$

welche für alle reellen Werthe von x stattfindet, weil das Integral in Bezug auf t zwischen $-\infty$ und $+\infty$ genommen wird. In dieser merkwürdigen Formel enthält das Integral die Veränderliche der Function als willkürliche Constante. Diese Gleichung lässt sich aus den Formeln des vorigen Paragraphen ableiten; aber man kann sie auch einfacher und direct auf folgende Art beweisen:

Nehmen wir zuerst das Integral in Bezug auf p zwischen den Grenzen 0, p, so wird unter dem Vorbehalte, dass nachher $p = \infty$ gesetzt wird, das Doppelintegral y zu

$$y = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin p\,(x-t)}{x-t} F(t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin z}{z} F\left(x - \frac{z}{p}\right) dz$$

wenn $t = x - \frac{z}{p}$ gesetzt wird. Setzt man nun $p = \infty$, so hat man

$$F\left(x - \frac{z}{p}\right) = F(x),$$

ausgenommen für die Werthe von z, welche selbst unendlich sind, und welche unberücksichtigt bleiben können, weil der Factor $\frac{\sin z}{z}$ den correspondirenden Theil des Integrales unendlich klein macht. Man hat also einfach:

$$y = \frac{1}{\pi} F(x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin z}{z}\, dz = F(x).$$

Es wäre hierbei noch zu beweisen, dass $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \pi$ ist. — Man erhält durch theilweise Integration:

$$\int e^{-az} \cos z\, dz = e^{-az} \sin z + a \int e^{-az} \sin z\, dz$$

$$\int e^{-az} \sin z\, dz = -e^{-az} \cos z - a \int e^{-az} \cos z\, dz$$

Werden die Integrale zwischen den Grenzen 0 und ∞ genommen, und dann mit A und B bezeichnet, so folgt:

$$A = aB,\ B = 1 - aA$$

also

$$B = \frac{1}{1+a^2},$$

das ist

$$\int_0^\infty e^{-az} \sin z\, dz = \frac{1}{1+a^2}.$$

Nun multiplicire man auf beiden Seiten mit da und integrire nach a, von 0 bis a, wobei man links zuerst die Integration nach a vollziehen kann. Weil nun

$$\int_0^a e^{-az} da = \frac{1-e^{-az}}{z},$$

so erhält man

$$\int_0^\infty \sin z\, dz \frac{(1-e^{-az})}{z} = \operatorname{arc\,tang} a.$$

Setzt man in diesem Integrale a unendlich gross, so kommt das Bemerkenswerthe Integral:

$$\int_0^\infty \frac{\sin z}{z} dz = \frac{\pi}{2}.$$

Ferner, da $\frac{\sin z}{z}$ für ein negatives z ungeändert bleibt, demnach

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin z}{z} dz = 2 \int_0^\infty \frac{\sin z}{z} dz$$

ist, so hat man:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \pi.$$

Als Anhang zur Betrachtung der bestimmten Integrale folgt noch:

§. 83.

Annähernde Berechnung begrenzter Integrale.

Da man häufig nicht vermag, ein vorgelegtes Integral $\int f(x)\,dx$ auf eine für die Rechnung brauchbare Weise allgemein darzustellen, selbst nicht durch Reihen, so bedarf man einer Methode, um wenigstens den angenäherten Zahlenwerth eines solchen Integrales, zwischen gegebenen Grenzen, zu finden.

I. Man setzt hier an die Stelle der Function $f(x)$ eine andere $\varphi(x)$, wo $\varphi(x)$ eine rationale ganze Function von x ist, und welche mit $f(x)$ eine gewisse Anzahl von Werthen gemein hat. Dies kann aber nur dann mit Erfolg geschehen, wenn die Function $f(x)$ zwischen den Grenzen der Integration stetig fortgeht.

Will man eine ganze Function y von x aus einer gewissen Anzahl von besonderen Werthen bestimmen, und sind $y_1, y_2, y_3, \ldots$ die den $x_1, x_2, x_3, \ldots$ entsprechenden Werthe, so setzt man bekanntlich am einfachsten:

$$y = X_1 y_1 + X_2 y_2 + X_3 y_3 + \ldots$$

wo

$$X_1 = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\ldots}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)\ldots}$$

$$X_2 = \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\ldots}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\ldots}$$

$$X_3 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\ldots}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)\ldots}$$

u. s. w.

Es sei nun der Ausdruck

$$z = \int f(x)\,dx$$

gegeben, wo dieses Integral durch keins der bisher angeführten Mittel zu finden ist, ja wo selbst die Function $f(x)$ noch unbekannt sein kann, so dass man blos die Werthe dieser Function für einige gegebene Werthe des x kennt. Nehmen wir z. B. an, dass man folgende zusammengehörige Werthe von x und $f(x)$ habe:

$$x = 0,\ a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots$$
$$f(x) = A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ \ldots$$

Dann kann $f(x)$ unter die folgende Form gebracht werden:

$$f(x) = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots}{a\,b\,c\,d\ldots} A$$
$$+ \frac{x(x-b)(x-c)(x-d)\ldots}{a(a-b)(a-c)(a-d)\ldots} B$$

$$+\frac{x(x-a)(x-c)(x-d)\dots}{b(b-a)(b-c)(b-d)\dots}C+\dots$$

Multiplicirt man alle Glieder dieses Ausdrucks durch dx, und integrirt sie dann, so erhält man:

$$z=\int f(x)\,dx=\frac{A}{a.b.c.d\dots}\int dx\,(a-x)(b-x)(c-x)(d-x)\dots$$
$$+\frac{B}{a(b-a)(c-a)(d-a)\dots}\int x\,dx(b-x)(c-x)(d-x)\dots$$
$$+\frac{C}{b(a-b)(c-b)(d-b)\dots}\int x\,dx(a-x)(c-x)(d-x)\dots$$
$$+\frac{D}{c(a-c)(b-c)(d-c)\dots}\int x\,dx(a-x)(b-x)(d-x)\dots$$

Hat man z. B. nur zwei Werthe von $f(x)=A$ und B, für $x=0$ und a, so wird der vorhergehende Ausdruck

$$z=\int_0^a f(x)\,dx=\frac{A}{a}\int dx\,(a-x)+\frac{B}{a}\int x\,dx,$$

also, wenn man nach den Integrationen $x=a$ setzt:

$$z=\frac{1}{2}a\,(A+B),$$

so dass dann die Grösse z gleich dem arithmetischen Mittel zwischen den Grössen aA und aB ist.

Hat man aber drei Werthe von $f(x)=A, B, C$, für $x=0, a, b$, so geht der vorhergehende allgemeine Ausdruck in den folgenden über:

$$z=\int_0^b f(x)\,dx=\frac{A}{ab}\int dx\,(a-x)(b-x)$$
$$+\frac{B}{a(b-a)}\int x\,dx\,(b-x)+\frac{C}{b(a-b)}\int x\,dx\,(a-x).$$

Setzt man hier nach den Integrationen $x=b$, so erhält man für den gesuchten Werth des gegebenen Integrals

$$z=\frac{Ab}{6a}(3a-b)+\frac{Bb^3}{6a(b-a)}+\frac{Cb(3a-2b)}{6(a-b)}.$$

So kann man fortgehen, indem man vier, fünf und mehr der gegebenen Grössen $A, B, C, \dots$ in Betrachtung zieht.

Viel einfacher werden diese resultirenden Gleichungen, wenn man die Differenzen der aufeinander folgenden Werthe von x unter sich gleich gross nimmt, d. h. wenn man $b-a=c-b=d-c\dots$ setzt. Auf diese Weise findet man für das Integral $z=\int f(x)\,dx$

zwischen den beiden Grenzen $x = a$ und $x = a + m$ nach der Ordnung folgende Ausdrücke:

$$\int_a^{a+m} f(x)dx = \frac{1}{2} m \, [f(a) + f(a+m)]$$

$$= \frac{1}{6} m \left[f(a) + 4f\left(a + \frac{1}{2}m\right) + f(a+m)\right]$$

$$= \frac{1}{8} m \left[f(a) + 3f\left(a + \frac{1}{3}m\right) + 3f\left(a + \frac{2}{3}m\right) + f(a+m)\right]$$

u. s. f.

Lässt man also die Grösse $x = a$ durch gleiche Intervalle ε wachsen, so dass x nach der Ordnung gleich a, $a + \varepsilon$, $a + 2\varepsilon$, $a + 3\varepsilon, \ldots$ wird, bis endlich der letzte dieser Werthe von $x = b$ wird, so wird man unser zwischen diesen beiden Grenzen $x = a$ und $x = b$ eingeschlossenes Integral auf folgende Weise darstellen.

1) Wenn man blos zwei Werthe von x, nämlich $x = a$ und $x = b$ kennt:

$$z = \int_a^b f(x) \, dx = \frac{1}{2} \varepsilon \, [f(a) + f(b)].$$

2) Wenn man drei Werthe $x = a$, $a + \varepsilon$ und b kennt:

$$z = \frac{1}{2} \varepsilon \, [f(a) + 4f(a+\varepsilon) + f(b)].$$

3) Wenn man vier Werthe $x = a$, $a + \varepsilon$, $a + 2\varepsilon$ und b kennt:

$$z = \frac{3}{8} \varepsilon \, [f(a) + 3f(a+\varepsilon) + 3f(a+2\varepsilon) + f(b)].$$

4) Wenn man fünf Werthe $x = a$, $a + \varepsilon$, $a + 2\varepsilon$, $a + 3\varepsilon$ und b kennt:

$$z = \frac{2}{45} \varepsilon [7f(a) + 32f(a+\varepsilon) + 12f(a+2\varepsilon) + 32f(a+3\varepsilon) + 7f(b)]$$

u. s. f.

II. Da diese ganz allgemeine Methode der Integration von so grosser Wichtigkeit ist, so ist es nicht unangemessen, sie noch auf eine andere Weise darzustellen.

Nehmen wir an, dass die Grösse $x = a$ nach und nach um die kleine Grösse ε wachse und in $a + \varepsilon$, $a + 2\varepsilon$, $a + 3\varepsilon, \ldots$ übergehe, bis sie endlich $a + n\varepsilon = b$ wird, so dass demnach zwischen den beiden äussersten Werthen a und b eine Anzahl von $n - 1$ Zwischengliedern enthalten ist, und dass $F(x)$ das unbestimmte Integral von $\int f(x) \, dx$, also auch

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

das begrenzte Integral $\int f(x)\,dx$ von $x = a$ bis $x = b$ ausdrücke. Man hat nun nach der Taylorschen Reihe:

$$F(a+\varepsilon) = F(a) + \varepsilon f(a) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 f'(a) + \ldots$$

$$F(a+2\varepsilon) = F(a+\varepsilon) + \varepsilon f(a+\varepsilon) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 f'(a+\varepsilon) + \ldots$$

$$F(a+3\varepsilon) = F(a+2\varepsilon) + \varepsilon f(a+2\varepsilon) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 f'(a+2\varepsilon) + \ldots$$

. . . .

$$F(a+n\varepsilon) = F(a+n\varepsilon-\varepsilon) + \varepsilon f(a+n\varepsilon-\varepsilon) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 f'(a+n\varepsilon-\varepsilon) + \ldots$$

Addirt man alle diese Reihen zusammen, und bemerkt, dass $n\varepsilon = b - a$ ist, so erhält man

$$F(b) - F(a) = \varepsilon \Sigma f(a+k\varepsilon) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \Sigma f'(a+k\varepsilon) + \frac{1}{6}\varepsilon^3 \Sigma f''(a+k\varepsilon) + \ldots$$

wo k nach der Reihe die Zahlen 0, 1, 2, 3, ... bedeutet, und Σ das Summenzeichen ist, das sich auf die n Werthe von k bezieht, die zwischen $k = 0$ und $k = n - 1$ enthalten sind. Nimmt man nach einander $f(x)$ und $f'(x)$, oder $f'(x)$ und $f''(x)$ u. s. w. statt $F(x)$ und $f(x)$, so erhält man auf dieselbe Weise

$$f(b) - f(a) = \varepsilon \Sigma f'(a+k\varepsilon) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \Sigma f''(a+k\varepsilon) + \ldots$$

$$f'(b) - f'(a) = \varepsilon \Sigma f''(a+k\varepsilon) + \ldots$$

. . . .

Dies vorausgesetzt, wird man, wenn man die dritten und höheren Potenzen der sehr kleinen Grösse ε weglässt,

$$\frac{1}{2}\varepsilon^2 \Sigma f'(a+k\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon(fb - fa) - \frac{1}{4}\varepsilon^2(f'b - f'a),$$

$$\frac{1}{6}\varepsilon^3 \Sigma f''(a+k\varepsilon) = \frac{1}{6}\varepsilon^2(f'b - f'a)$$

setzen können, und hieraus erhält man

$$F(b) - F(a) = \varepsilon \Sigma f(a+k\varepsilon) + \frac{1}{2}\varepsilon(fb - fa) - \frac{1}{12}\varepsilon^2(f'b - f'a),$$

oder, was dasselbe ist,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varepsilon\left[\frac{1}{2}fa + f(a+\varepsilon) + f(a+2\varepsilon) + \ldots + f(a+n\varepsilon-\varepsilon) + \frac{1}{2}fb\right] - \frac{1}{12}\varepsilon^2(f'b - f'a).$$

Dieser Ausdruck wird das gesuchte Integral desto genauer darstellen, je kleiner ε oder $\frac{1}{n}$ (b — a) ist, und je langsamer die Function $f(x)$ zwischen den Grenzen a und b sich ändert. In den meisten Fällen wird man auch das Glied mit ε^2 vernachlässigen können, so dass dann die Formel nur die besonderen Werthe von $f(x)$ enthält, die in Zahlen gegeben sein können, ohne dass die Form dieser Function bekannt zu sein braucht.

IV. Integration der höheren Differentialausdrücke einer, und der Partialdifferentiale mehrerer Veränderlichen.

§. 84.

Integration der höheren Differentiale.

Bisher war immer das erste Differential $dy = Xdx$ gegeben, aus welchem durch Integration $y = \int Xdx$ bestimmt wurde.

Nehmen wir nun an, dass blos das zweite Differential $d^2y = Xdx^2$ bekannt sei, so ist klar, dass y daraus nur durch eine zweimalige Integration herzuleiten ist. Es ist nämlich $\frac{d^2y}{dx} = Xdx$, und wegen $\frac{d^2y}{dx} = d\frac{dy}{dx}$ (indem dx constant ist) auch $d\frac{dy}{dx} = Xdx$, also, wenn man integrirt: $\frac{dy}{dx} = \int Xdx = f(x) + C$. Daraus folgt weiter: $dy = f(x)\,dx + Cdx$, und wenn man abermals integrirt: $y = \int f(x)\,dx + Cx + C'$, wo C' die Constante der zweiten Integration bezeichnet. Wegen $f(x) = \int Xdx$ ist also auch

$$y = \int dx \int Xdx + Cx + C'$$

wobei durch $\int dx \int Xdx$ eine zweifache Integration angedeutet wird.

Ist das Differential dritter Ordnung $d^3y = Xdx^3$ gegeben, so findet man ebenso (durch Wiederholung des vorigen Verfahrens):

$$y = \int dx \int dx \int Xdx + Cx^2 + C'x + C''$$

wobei C, C', C'' die unbestimmten Constanten sind, und das erste Glied rechts eine dreimalige Integration bedeutet, die so zu verstehen ist: $\int dx \left(\int dx \left(\int Xdx\right)\right)$.

Diese wiederholten Integrationen deutet man, von den unbestimmten Constanten abgesehen, auf folgende einfachere Art an:

$$\text{Aus } d^2y = Xdx^2 \text{ folgt } y = \int\int Xdx^2;$$
$$\text{aus } d^3y = Xdx^3 \text{ hat man } y = \int\int\int Xdx^3;$$

u. s. w.

Es folgt aus der Entstehung der höhern Differentiale von selbst, dass man aus dem n^{ten} Differentiale die ursprüngliche Function, das ist das n^{te} Integral, findet, indem man n mal nach einander integrirt.

Mittelst des theilweisen Integrirens lassen sich die höhern Integrale auf lauter einfache zurückführen. Dadurch erhält man:

$$\int\int Xdx^2 = x\int Xdx - \int Xxdx$$
$$\int\int\int Xdx^3 = \frac{1}{1.2}\left(x^2\int Xdx - 2x\int Xxdx + \int Xx^2dx\right)$$
$$\int\int\int\int Xdx^4 = \frac{1}{1.2.3}\left(x^3\int Xdx - 3x^2\int Xxdx + 3x\int Xx^2dx - \int Xx^3dx\right)$$

u. s. w.

Die in diesen Formeln ausgelassenen unbestimmten Constanten kann man hineinbringen, indem man $\int Xdx + C$ statt $\int Xdx$, $\int Xxdx + C'$ statt $\int Xxdx$ u. s. w. setzt. Demnach erscheinen im n^{ten} Integrale auch n willkürliche oder unbestimmte Constanten.

Z. B. Man erhält durch diese Ergänzung

$$\int\int\int\int Xdx^4 = \frac{1}{2.3}\left[x^3\int Xdx - 3x^2\int Xxdx + 3x\int Xx^2dx - \int Xx^3dx\right] + Cx^3 + C'x^2 + C''x + C'''.$$

§. 85.

Integration der partiellen Differentiale.

Es bezeichne u eine Function der beiden von einander unabhängigen Variablen x, y, und es sei der zweite partielle Differentialquotient $\frac{d^2u}{dxdy} = z$, also $z = f(x, y)$. Hier lässt sich die ursprüngliche Function u nach den Regeln für die Integration von Differentialformeln mit Einer Variablen entwickeln; weil nach dem Sinne dieses Differentialquotienten der Reihe nach nur immer eine der beiden Grössen x, y als variabel, die andere aber als constant betrachtet

wird. Es lässt sich also die Gleichung $\frac{d^2u}{dxdy} = z$ erst hinsichtlich einer der Veränderlichen, und dann auch hinsichtlich der andern integriren. Nämlich, wegen $\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{d\frac{du}{dx}}{dy}$ hat man $\frac{d\frac{du}{dx}}{dy}dy = zdy$, und wenn nach y integrirt wird, so erhält man $\frac{du}{dx} = \int zdy$; daraus folgt $\frac{du}{dx}dx = dx\int zdy$, und wenn man jetzt nach x integrirt:

$$u = \int dx \int zdy;$$

dabei ist die Ordnung der beiden Integrationen, im Allgemeinen genommen, willkürlich, und es ist eben so gut auch

$$u = \int dy \int zdx.$$

Kürzer und üblicher ist folgende Bezeichnung:

$$u = \int\int zdxdy \text{ oder } u = \int\int zdydx,$$

wobei sich jedes der beiden Integralzeichen auf eine der beiden Variablen x und y bezieht; ein solches Integral wird auch ein doppeltes oder zweifaches genannt. — Hinsichtlich der willkürlichen Constanten muss noch bemerkt werden, dass man, der nöthigen Allgemeinheit wegen, dem Integral nach y eine unbestimmte Function von x, und dem Integral nach x eine willkürliche Function von y beifügen muss. Da indess in der Anwendung auf Geometrie oder Mechanik diese Integrale immer innerhalb gewisser Grenzen genommen werden, so sind in diesem Falle auch diese willkürlichen Constanten entbehrlich.

Man wird nun auch die Bedeutung des dreifachen Integrals $\int\int\int vdxdydz$, wobei v im Allgemeinen eine Function der drei unabhängig veränderlichen Grössen x, y, z ist, leicht verstehen. Ist nämlich der partielle Differentialquotient $\frac{d^3u}{dxdydz} = v$ gegeben, so findet man daraus, wenn man zuerst nach z, dann nach y und endlich nach x integriren will (im Allgemeinen ist die Ordnung wieder willkürlich):

$$u = \int\int\int vdxdydz = \int_x dx \int_y dy \int_z vdz.$$

In Bezug auf die willkürlichen Constanten ist wieder zu bemerken, dass man nach der in Bezug auf z durchgeführten Integration eine willkürliche Function von x, y, und so in den beiden übrigen, nach

y und x ausgeführten Integrationen beziehungsweise eine Function von x, z und y, z beifügen muss. In der Regel werden aber auch solche Integrale innerhalb bestimmter Grenzen genommen, und zwar am häufigsten: in Bezug auf z, von $z = F(x, y)$ bis $z = f(x, y)$; in Beziehung auf y von $y = F_1(x)$ bis $y = f_1(x)$; und in Hinsicht auf x, von $x = A$ bis $x = a$, wo F, f, F_1, f_1 gegebene Functionen bezeichnen.

Man sieht endlich leicht, dass man auf dieselbe Art auch noch höhere Integrale bestimmen könnte.

V. Integration der Differentialformeln mit mehreren Variablen.

§. 86.

Bedingungen der Integrabilität für die Differentialausdrücke der ersten Ordnung mit mehreren unabhängig Veränderlichen.

Wenn eine Differentialformel mit einer einzigen Variablen x, das ist Xdx, wo X eine Function von x bedeutet, zur Integration vorgelegt wird, so unterliegt die Existenz des unbekannten Integrales keinem Zweifel, denn es lässt sich das Integral als Summe betrachten. Also kann Xdx immer als das genaue Differential einer gewissen Function von x betrachtet werden, die sich entweder in einem geschlossenen Ausdrucke darstellen, oder wenigstens in Gestalt einer Reihe entwickeln lässt. — Anders verhält sich aber die Sache bei Differentialformeln mit mehreren von einander unabhängigen veränderlichen Grössen x, y, z,..., welche, insofern sie vom ersten Grade sind, die Form

$$Pdx + Qdy + Rdz + \dots$$

haben, wobei P, Q, R, ... Functionen von x, y, z, ... bedeuten. Wofern diese Functionen nicht gewissen Bedingungen Genüge leisten, ist es unmöglich, dass die gegebene Differentialformel durch Differenzirung irgend einer Function der Variablen x, y, z, ... entstehe, d. h. integrirt werden könne.

Wir betrachten zuerst Differenzialformeln, in welchen blos zwei von einander unabhängige veränderliche Grössen erscheinen. Es sei eine Differentialformel der ersten Ordnung von zwei Variablen x und y, nämlich

$$Pdx + Qdy$$

gegeben, wo P und Q Functionen von x und y bedeuten. Eine solche Formel kann nicht allgemein als das vollständige Differential einer Function von x und y angesehen werden, sondern dies wird nur dann der Fall sein, wenn eine gewisse Relation zwischen P und Q existirt. Nämlich es sei U irgend eine Function von x und y; dann wird das vollständige Differential von U ausgedrückt durch

$$dU = \frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy.$$

Soll nun die gegebene Function $Pdx + Qdy$ aus der Differenzirung irgend einer Function U hervorgehen, so muss man setzen können

$$P = \frac{dU}{dx},\ Q = \frac{dU}{dy}.$$

Aber nach §. 39 ist

$$\frac{d^2U}{dxdy} = \frac{d^2U}{dydx};$$

also muss man gleichfalls haben:

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx},$$

eine Bedingungsgleichung, welche immer bestehen muss, wenn der Ausdruck $Pdx + Qdy$ das wahre oder vollständige Differential einer Function zweier Variablen, d. h. integrabel sein soll.

Wir betrachten ferner ein Differential mit drei Variablen. Es sei die Differentialformel

$$Pdx + Qdy + Rdz$$

gegeben, wo P, Q, R Functionen von x, y, z bedeuten. Wenn nun U eine Function von x, y, z ist, so hat man

$$dU = \frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dz}dz,$$

und überdies

$$\frac{d^2U}{dxdy} = \frac{d^2U}{dydx};\ \frac{d^2U}{dxdz} = \frac{d^2U}{dzdx};\ \frac{d^2U}{dydz} = \frac{d^2U}{dzdy}.$$

Also kann die gegebene Formel nur dann das Differential einer gewissen Function von x, y, z sein, wenn die Grössen P, Q, R den Bedingungen genügen:

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx},\ \frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx},\ \frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}.$$

Dies sind die für die Vollständigkeit des Differentials $Pdx + Qdy + Rdz$ zeugenden 3 Bedingungsgleichungen, welche zugleich hier die Integrabilität des gegebenen Differentials bedingen.

Aehnliche Bedingungen findet man für eine grössere Anzahl von Variablen.

Die Bedingungen der Integrabilität eines Differentialausdruckes kann man auch als die Bedingungen der Unabhängigkeit der in ihm enthaltenen Veränderlichen betrachten. — Finden bei einer in der Anwendung wirklich vorkommenden Differentialfunction diese Bedingungen nicht Statt, so müssen die Veränderlichen von einander abhängig sein.

Als Beispiel betrachten wir die Hydrostatik. Diese lehrt, dass das Gleichgewicht einer Flüssigkeit durch die drei Gleichungen

$$\frac{dp}{dx} = \varrho X, \quad \frac{dp}{dy} = \varrho Y, \quad \frac{dp}{dz} = \varrho Z$$

ausgedrückt wird, wo p den Druck im materiellen Puncte, dessen rechtwinklige Coordinaten x, y, z sind, und dessen Dichtigkeit p ist, bedeutet, und X, Y, Z die auf diesen Punct parallel mit den Axen wirkenden Kräfte bezeichnen. Wenn man daraus die Formel

$$p = \int \varrho \, (Xdx + Ydy + Zdz)$$

ableitet, so kann man dem allgemeinen Gesetze des Gleichgewichtes der Flüssigkeiten eine andere analytische Form geben, indem dazu der Ausspruch hinreicht, dass diese Differentialfunction hinter dem Integralzeichen integrabel sein muss in Bezug auf die drei unabhängigen Variablen x, y, z.

§. 87.

Integrirung der Differentialformeln mit mehreren Variablen.

Wenn der gegebene Differentialausdruck den Bedingungen der Integrabilität genügt, so kann man sein Integral auf folgende Weise erhalten.

Es sei

$$dU = Pdx + Qdy$$

gegeben. Da Pdx das partielle Differential von U nach x ist, indem $\frac{dU}{dx} = P$ ist, so erhält man, wenn man dasselbe ebenfalls nach x integrirt,

$$U = \int Pdx + Y,$$

wo Y die Stelle der willkürlichen Constante vertritt und eine Function der Variablen y allein bedeutet. Dieses Y wird aber hier durch die Bedingung bestimmt, dass auch $\frac{dU}{dy} = Q$ sein muss. Differenzirt man demnach die Gleichung $U = \int Pdx + Y$ in Bezug auf y, so erhält man

$$\frac{dU}{dy}=\int\frac{dP}{dy}dx+\frac{dY}{dy},$$

also ist

$$Q=\int\frac{dP}{dy}dx+\frac{dY}{dy}$$

oder

$$dY=\left(Q-\int\frac{dP}{dy}dx\right)dy;$$

diese Gleichung integrirt, giebt

$$Y=\int\left(Q-\int\frac{dP}{dy}dx\right)dy.$$

Das gesuchte Integral ist folglich

$$U=\int Pdx+\int\left(Q-\int\frac{dP}{dy}dx\right)dy,$$

ein Ausdruck, welcher völlig bestimmt werden kann, wenn $Q-\int\frac{dP}{dy}dx$ eine Function von y allein (oder constant) ist. Damit dies stattfinde, muss das Differential dieser Function, nach x genommen, den Werth Null haben, d. h., es muss

$$\frac{dQ}{dx}-\frac{dP}{dy}=0$$

sein. Man sieht also, dass die Ausführbarkeit dieser Integration die Existenz der im §. 86 angegebenen Bedingung voraussetzt.

Man kann bei dem eben erklärten Verfahren, wenn sich das Integral $\int Qdy$ leichter angeben lässt, als $\int Pdx$, zuerst in Bezug auf y integriren; daraus erwächst die Formel

$$U=\int Qdy+\int\left(P-\int\frac{dQ}{dx}dy\right)dx$$

Auch versteht es sich von selbst, dass man in beiden Formeln dem Resultate noch eine willkürliche Constante zusetzen muss.

Wäre P blos eine Function von x, und Q blos eine Function von y, so hätte man geradezu

$$\int(Pdx+Qdy)=\int Pdx+\int Qdy.$$

Um aus einem vollständigen Differentiale einer Function von **mehr als zwei** Veränderlichen die ursprüngliche Function zu finden, braucht man die eben entwickelte Integrationsmethode nur wiederholt anzuwenden.

Es sei

$$dU=Pdx+Qdy+Rdz$$

ein gegebenes den Bedingungen der Integrabilität entsprechendes Differential. Das Integral U muss die Form

$$U=\int Pdx+Y$$

haben, wo Y eine Function von y und z allein bedeutet. Diese Gleichung giebt, wie oben,

$$\frac{dU}{dy}=\int\frac{dP}{dy}dx+\frac{dY}{dy},$$

und da diese Grösse gleich Q sein muss, so ist

$$\frac{dY}{dy}=Q-\int\frac{dP}{dy}dx,\ \text{und}\ Y=\int dy\left(Q-\int dx\frac{dP}{dy}\right)+Z,$$

wo Z eine Function von z allein bedeutet. Also hat man jetzt

$$U=\int P\,dx+\int dy\left(Q-\int dx\frac{dP}{dy}\right)+Z.$$

Diese Gleichung giebt weiter

$$\frac{dU}{dz}=\int dx\frac{dP}{dz}+\int dy\left(\frac{dQ}{dz}-\int dx\frac{d^2P}{dydz}\right)+\frac{dZ}{dz},$$

und da diese letzte Grösse gleich R sein muss, so wird die Function Z bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{dZ}{dz}=R-\int dx\frac{dP}{dz}-\int dy\left(\frac{dQ}{dz}-\int dx\frac{d^2P}{dydz}\right),$$

woraus

$$Z=\int dz\left[R-\int dx\frac{dP}{dz}-\int dy\left(\frac{dQ}{dz}-\int dx\frac{d^2P}{dydz}\right)\right]+C.$$

Also endlich ist das gesuchte Integral

$$U=\int dx.P+\int dy\left(Q-\int dx\frac{dP}{dy}\right)+$$
$$+\int dz\left[R-\int dx\frac{dP}{dz}-\int dy\left(\frac{dQ}{dz}-\int dx\frac{d^2P}{dydz}\right)\right]+C.$$

Man kann auch hier leicht nachweisen, dass dies Verfahren der Integration die Existenz der im §. 86 angegebenen Bedingungen der Integrabilität voraussetzt. Damit nämlich die Grösse

$$R-\int dx\frac{dP}{dz}-\int dy\left(\frac{dQ}{dz}-\int dx\frac{d^2P}{dydz}\right)$$

eine Function von z allein sei, müssen die Differentiale dieser Function, nach x und nach y genommen, Null sein, welche Bedingungen geben:

$$\frac{dR}{dx}-\frac{dP}{dz}-\int dy\left(\frac{d^2Q}{dzdx}-\frac{d^2P}{dydz}\right)=0$$
$$\frac{dR}{dy}-\int dx\frac{d^2P}{dzdy}-\frac{dQ}{dz}+\int dx\frac{d^2P}{dydz}=0.$$

Diese Gleichungen werden bestehen, wenn man hat:

$$\frac{dR}{dx}-\frac{dP}{dz}=0,\ \frac{dQ}{dx}-\frac{dP}{dy}=0,\ \frac{dR}{dy}-\frac{dQ}{dz}=0$$

Es ist kaum nöthig zu bemerken, dass man zu demselben Resultate gelangen muss, welches auch die Variable sein mag, bei der man die Integration beginnt. Also kann man in der obigen Formel für das gesuchte Integral P oder Q mit R vertauschen, wenn man nur zugleich x oder y an die Stelle von z treten lässt.

Auf dieselbe Weise wird man Differentialformeln mit vier, fünf veränderlichen Grössen u. s. w. behandeln.

Man sieht, dass die Integration einer integrabeln Differentialformel immer auf die Integration von Differentialformeln mit Einer Variablen, d. h. auf blosse Quadraturen sich zurückführen lässt.

VI. Von den Differentialgleichungen im Allgemeinen.

§. 88.

Bildung der Differentialgleichungen.

Die Differentialgleichungen werden nach dem höchsten der Differentiale, die sie enthalten, in Ordnungen klassificirt, und nach der höchsten Potenz der Differentiale in Grade; Gleichungen vom ersten Grade heissen auch lineare. — Eine vorgelegte Differentialgleichung integriren, heisst, aus derselben eine Gleichung zwischen den veränderlichen Grössen selbst, die sogenannte Integralgleichung finden, welche differenzirt zur gegebenen Gleichung führt. Da, wie wir sehen werden, die Integralgleichung in ihrer allgemeinsten Form unbestimmte Functionen oder doch unbestimmte Constanten enthält, welche in der Differentialgleichung nicht erscheinen; so ergiebt sich bei der Rechnungsprobe die zur Integration vorgelegte Gleichung erst, wenn man zwischen der Integralgleichung und ihrem Differential die erwähnte Function oder Constante eliminirt.

Es sei

$$u = 0$$

eine Gleichung zwischen zwei oder mehreren veränderlichen Grössen, von denen man eine als Function der übrigen betrachten kann. Differenzirt man diese Gleichung, was

$$du = 0$$

giebt, oder combinirt diese beiden Gleichungen auf irgend eine Art, so entsteht eine Differentialgleichung von der ersten Ordnung. Bildet man ferner

$$d^2u = 0,$$

oder verbindet diese mit den beiden vorigen Gleichungen, so kommt man zu einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung, von welcher man zu Gleichungen noch höherer Ordnungen aufsteigen kann.

Vorzüglich wird hier der Fall betrachtet, wo die Gleichung $u=0$ nur zwei Veränderliche enthält, also nur Eine unabhängig Variable (so dass an partielles Differenziren nicht zu denken ist).

Aus einer gegebenen Ur-Gleichung $u=0$ lässt sich durch Differenziren irgend eine Constante wegschaffen. Dies geschieht entweder dadurch, dass man vor dem Differenziren diese Constante entwickelt, sondert, d. h. die Gleichung $u=0$ auf die Form $v+a=0$ bringt, oder, was dasselbe Resultat giebt, wenn man durch Verbindung der Differentialgleichung mit ihrer Urgleichung die Constante a eliminirt. Demnach kann die erste Differentialgleichung eine Constante weniger, die zweite zwei weniger, u. s. w. als die Urgleichung enthalten, indem bei jedem Uebergange von einer Gleichung zu ihrer Differentialgleichung der nächst höheren Ordnung eine Constante sich wegschaffen lässt. — Es folgt daraus umgekehrt, dass jedes erste Integral einer Differentialgleichung eine Constante mehr enthält, als die Differentialgleichung.

Bis jetzt betrachteten wir totale Differentialgleichungen.

Wenn aber die gegebene Urgleichung mehr als zwei Veränderliche, also mehr als Eine unabhängig Veränderliche enthält, so kann man partiell differenziren nach den unabhängig Veränderlichen. Die partiellen Differentialgleichungen lassen sich untereinander und mit ihrer Urgleichung verbinden, so dass nicht blos constante Grössen, sondern sogar veränderliche Bestandtheile der Urgleichung gänzlich wegfallen. — Daraus folgt umgekehrt, dass das Integral einer partiellen Differentialgleichung willkürliche Functionen einführt.

Wenn die Gleichung nur eine einzige unabhängig Veränderliche enthält, so ist es nicht möglich, durch Verbindung der Differentialgleichung mit der Urgleichung einen veränderlichen Bestandtheil gänzlich wegzuschaffen.

Während man also bei einer Gleichung mit zwei Veränderlichen durch Differenziren nur willkürliche Constanten wegschaffen kann, lassen sich bei einer Gleichung mit drei oder mehr Veränderlichen durch partielles Differenziren sogar willkürliche Functionen eliminiren.

Der Zusammenhang zwischen einer Differentialgleichung und der primitiven ist viel verwickelter, als der zwischen einer Differentialformel und ihrem Integral. Dieselbe primitive Gleichung kann durch verschiedene Operationen zu Differentialgleichungen führen, die gänzlich

von einander verschieden sind. Anderseits kann ein System von unzählig vielen verschiedenen primitiven Gleichungen derselben Differentialgleichung entsprechen. — Daher entstehen besondere Schwierigkeiten bei Integrirung der Differentialgleichungen.

§. 89.

Unterschied der Gleichungen mit endlichen Grössen, mit totalen Differentialen und mit partiellen Differentialen.

Es ist wichtig, diesen merkwürdigen Unterschied in der Bedeutung der Gleichungen aufzufassen.

Eine endliche Gleichung zwischen veränderlichen Grössen drückt einen in jeder Beziehung vollkommen bestimmten (individuellen) Zusammenhang zwischen diesen Grössen aus.

Differenzirt man aber die Gleichung, so kann man dabei eine Constante wegschaffen, und ebenso bei jeder höhern Differenzirung. Durch fortgesetztes Differenziren wird man so viele Gleichungen sich verschaffen, als man will, aus denen man dann so viele der Constanten, als man will, eliminiren kann. Jede dieser Differentialgleichungen, sowie auch jede Combination derselben, drückt denselben Zusammenhang zwischen den veränderlichen Grössen aus, wie die primitive Gleichung, von welcher sie abgeleitet sind, aber auf eine allgemeinere Weise, insofern dabei constante Grössen wegfallen, also unbestimmt sind oder willkürlich angenommen werden können. Je weniger von den Constanten in der Differentialgleichung vorkommen, d. i. je höher die Ordnung der Differentialgleichung, desto allgemeiner erscheint die primitive Relation ausgedrückt.

Erstes Beispiel. Es sei $y = ax$; dann ist $x dy = y dx$, eine Differentialgleichung, welche immer besteht, wenn y dem x proportionirt ist.

Zweites Beispiel. Wenn

$$y = ae^{x} + be^{-x},$$

so ist

$$d^2y = y dx^2,$$

eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, aus welcher die Constanten a und b beide verschwunden sind.

Drittes Beispiel. Man habe die Gleichung

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = c \tag{1}$$

zwischen zwei Veränderlichen. Differenzirt man sie, so erhält man die erste Differentialgleichung derselben

$$(x-a)\,dx + (y-b)\,dy = 0, \tag{2}$$

und die zweite Differentialgleichung, unter der Voraussetzung, dass dx constant ist,

(3) $$(y-b)\,d^2y + dx^2 + dy^2 = 0.$$

Wollte man die letzte Gleichung noch einmal differenziren, so würde man für die dritte Differentialgleichung von (1) erhalten:

$$(y-b)\,d^3y + 3dy\,d^2y = 0,$$

oder auch, wenn man den Werth von $y-b$ aus (3) substituirt,

(4) $$(dx^2 + dy^2)\,d^3y - 3dy\,(d^2y)^2 = 0$$

u. s. w.

Die Gleichung (1) enthält drei Constanten, die Gleichung (2) zwei Constanten, die Gleichung (3) nur Eine Constante, und die Gleichung (4) enthält keine der drei Constanten mehr. Die Gleichung (2) umfasst z. B. alle Gleichungen, die aus (1) hervorgehen, indem c alle Werthe bekommt.

Die Gleichungen mit totalen Differentialen sind also allgemeiner, als die Gleichungen mit endlichen Grössen, aber sie drücken doch immer nur eine bestimmte Gattung von Gleichungen aus, an denen constante Grössen unserer Willkür überlassen bleiben.

Eine noch grössere Allgemeinheit erlangen aber die Gleichungen mit partiellen Differentialen. Dies kommt daher, weil durch die partielle Differenzirung der Gleichungen mit 3 oder mehr Veränderlichen nicht nur constante Grössen, sondern selbst willkürliche Functionen eliminirt werden können. Die partiellen Differentialgleichungen beziehen sich nur auf die Art, wie die Relation entstanden ist; sie drücken eine Familie von Gleichungen aus, die nach einem gemeinschaftlichen Bildungsgesetze entstehen; diese Familien sind um so allgemeiner, je höher die Ordnung der Differentialgleichung ist.

Erstes Beispiel. Es sei die endliche Gleichung

(1) $$z = \phi(ax + by)$$

gegeben, wo ϕ irgend eine Function von $ax + by$ bezeichnet. — Wird diese Gleichung partiell differenzirt in Bezug auf x und y, so erhält man

$$\frac{dz}{dx} = a\phi', \text{ und } \frac{dz}{dy} = b\phi'$$

wo ϕ' den Differentialquotienten von ϕ bezeichnet. Eliminirt man aus diesen beiden partiellen Differentialgleichungen die Grösse ϕ', so erhält man als erste Differentialgleichung der Gleichung (1)

(2) $$a\frac{dz}{dy} - b\frac{dz}{dx} = 0,$$

und diese Gleichung ist der gegebenen (1) gleichgeltend, obschon sie die willkürliche Function ϕ nicht mehr enthält. — Differenzirt man die Gleichung (2) noch einmal partiell nach x und nach y, und setzt dabei, wie gewöhnlich, dx und dy als constant voraus, so erhält man

$$a \frac{d^2z}{dxdy} - b \frac{d^2z}{dx^2} = 0$$

$$a \frac{d^2z}{dy^2} - b \frac{d^2z}{dxdy} = 0$$

und wird dann aus diesen zwei Gleichungen die Grösse $\frac{a}{b}$ eliminirt, so erhält man als zweite Differentialgleichung von (1)

(3) $$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 = \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2}$$

wo auch die Constanten a und b nicht mehr vorkommen.

Zweites Beispiel. Es sei die Gleichung

(1) $$y = x\phi(z) + \psi(z)$$

gegeben. Um die von den willkürlichen Functionen ϕ und ψ unabhängige Gleichung mit partiellen Differentialen zu erhalten, differenzire man (1) nach x und dann nach y; so erhält man, wenn $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ durch p, q bezeichnet werden,

$$0 = \phi(z) + x\phi'(z)p + \psi'(z)p$$

$$1 = x\phi'(z)q + \psi'(z)q$$

und hieraus ergiebt sich durch Division:

(2) $$\frac{p}{q} = -\phi(z)$$

wo ϕ', ψ, ψ' verschwunden sind. Um auch noch ϕ wegzuschaffen, differenzire man die Gleichung (2) noch einmal in Bezug auf x und dann y. Dadurch erhält man, wenn $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ durch r, s, t bezeichnet werden,

$$\frac{qr - ps}{q^2} = -\phi'(z).p; \quad \frac{qs - pt}{q^2} = -\phi'(z).q$$

und durch Division:

(3) $$q^2r - 2pqs + p^2t = 0.$$

Diese Gleichung mit partiellen Differentialen drückt den gemeinschaftlichen Charakter aller derjenigen Gleichungen aus, die sich nur durch die Beschaffenheit der Functionen ϕ und ψ unterscheiden.

Man sieht, wie die Differentialgleichungen mit der Ordnung der Differentiale an Allgemeinheit ihrer Bedeutung zunehmen, und noch bedeutender ist diese Zunahme bei den partiellen Differentialgleichungen.

VII. Integration der totalen Differentialgleichungen, vorzüglich mit 2 Veränderlichen.

§. 90.

Differentialgleichungen der ersten Ordnung zwischen zwei Variablen.

Unter dieser Benennung begreift man jede Gleichung von der Form

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

wo x als unabhängig Variable, und y als eine Function von x betrachtet wird. Es handelt sich nun darum, die Relation zwischen x und y zu finden, d. i. die primitive Gleichung oder das Integral der gegebenen Differentialgleichung.

Die gegebene Gleichung kann immer nach $\frac{dy}{dx}$ aufgelöst werden, so dass man hat:

$$\frac{dy}{dx} = \phi(x, y).$$

Wir wollen die Entstehung einer solchen Gleichung betrachten. Wenn eine primitive Gleichung

$$F(x, y, a, b, c, \ldots) = 0$$

gegeben ist, welche die zwei Variablen x, y nebst mehreren Constanten a, b, c, ... enthält, so wird zugleich damit die Gleichung bestehen, welche man daraus unmittelbar durch Differenzirung erhält, nämlich

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0, \text{ oder } \frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy = 0.$$

Man kann nun diese beiden Gleichungen, $F = 0$ und $dF = 0$, auf mannichfaltige Arten combiniren; das Resultat wird immer gleichfalls eine gültige Gleichung sein. Es ist möglich, dass schon die Differenzirung eine der Constanten a, b, c, ... verschwinden macht, welcher Fall eintritt, wenn diese Constante nur in einem Gliede vorkommt, welches weder x noch y enthält. Man kann aber auch eine beliebige Constante eliminiren, die beiden Gleichungen gemeinschaftlich ist. Es ist auch möglich, dass alle Glieder der Differentialgleichung einen x und y enthaltenden Factor gemein haben, der durch Dividiren wegfallen kann. Hieraus ist leicht zu übersehen, dass man aus einer und derselben primitiven Gleichung im Allgemeinen durch verschiedene Operationen mehrere von einander unterschiedene Differentialgleichungen ableiten kann, und man begreift daraus die Schwierigkeit der umgekehrten Aufgabe, das Integral jeder gegebenen Differentialgleichung zu finden.

Umgekehrt folgt: Das Integral einer gegebenen Differentialgleichung der ersten Ordnung muss, um eben so allgemein zu sein als die Differentialgleichung, eine willkürliche Constante enthalten, d. h. welche nicht in der gegebenen Differentialgleichung vorkommt. Diese primitive Gleichung muss der gegebenen Differen-

tialgleichung genügen, d. h. es müssen die Werthe von y und $\frac{dy}{dx}$, welche aus der primitiven Gleichung und ihrem Differentiale folgen, in die gegebene Gleichung substituirt, dieselbe entweder identisch machen, oder es muss die Elimination der willkürlichen Constante aus der primitiven Gleichung und ihrer Differentialgleichung die gegebene Gleichung wieder hervorgehen lassen.

Jede Gleichung in endlichen Ausdrücken, welche einer gegebenen Differentialgleichung genügt und eine willkürliche Constante enthält, ist das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung. Dieses allgemeine Integral giebt die besondern (partikulären) Integrale, wenn man darin der willkürlichen Constante verschiedene besondere Werthe beilegt. Also drückt die Differentialgleichung eine Eigenschaft aus, die einer unendlichen Menge von bestimmten Gleichungen gemeinschaftlich ist. — Damit bei bestimmten Fällen der Anwendung die Constante einen bestimmten Werth erhalte, muss die Relation zwischen x und y noch näher bekannt sein.

Es sei z. B. die Differentialgleichung

$$x\frac{dy}{dx}-y+b=0$$

gegeben; ihr allgemeines Integral ist:

$$y-ax-b=0$$

wo a eine willkürliche Constante bedeutet. Lässt man a variiren von $-\infty$ bis $+\infty$, so erhält man die particulären Integrale.

Wenn schon die Integration der Differentialformeln mit einer Variablen oft bedeutenden Schwierigkeiten unterworfen ist, so wird man natürlich bei der Integration der Differentialgleichungen überhaupt noch grössere Hindernisse erwarten. Uebrigens sieht man die Integration einer Differentialgleichung von der ersten Ordnung schon als vollendet an, wenn es nur gelungen ist, ihre Integralgleichung so darzustellen, dass darin blos noch auszumittelnde Integrale von integrablen Differentialformeln erscheinen.

Jede Differentialgleichung von der ersten Ordnung mit zwei veränderlichen Grössen x und y, und vom ersten Grade (d. h., in welcher die Differentiale dx und dy nur in der ersten Potenz vorkommen), hat die Form

$$(\dagger) \qquad Pdx+Qdy=0,$$

wobei im Allgemeinen P und Q Functionen von x und y bedeuten. Ehe man sich auf weitere Schritte einlässt, wird man vor Allem untersuchen, ob $Pdx+Qdy$ nicht etwa eine integrable Differentialformel

ist, was bekanntlich von dem Stattfinden der Bedingung $\frac{dP}{dy}=\frac{dQ}{dx}$ abhängt. Entsprechen die Functionen P, Q derselben, so bestimme man das Integral von $Pdx+Qdy$ nach den Methoden des §. 87; wird es der Kürze wegen durch $F(x,y)$ vorgestellt, so ist die vorgelegte Differenzialformel mit $dF(x,y)=0$ einerlei, und hieraus folgt unmittelbar die Integralgleichung

$$F(x,y)=C.$$

Zur Bestimmung der Constante muss man den Werth von y für einen speciellen Werth von x kennen.

Aber in den wenigsten Fällen wird sich in einer gegebenen Differentialgleichung von der Form (†) eine integrable Differentialformel befinden, da das Resultat der Differenzirung einer Gleichung $F(x,y)=0$, durch Wegschaffung eines allen Gliedern gemeinschaftlichen veränderlichen Factors, oder durch Verbindung dieses Resultats mit der ursprünglichen Gleichung, aufhört der oben erwähnten Bedingung der unmittelbaren Integrabilität Genüge zu leisten. Man muss sodann auf einem der im Folgenden angedeuteten Wege zum Ziele zu kommen suchen.

Dass übrigens immer eine Gleichung zwischen x und y existirt, welche der vorgelegten Differentialgleichung Genüge leistet, ergiebt sich daraus, dass man y wenigstens durch eine Reihe, mittelst der Taylorschen Reihe, darstellen kann, wie wir später sehen werden.

Die vorzüglichsten Mittel, deren man sich zur Zurückleitung der ursprünglichen Gleichung aus ihrer Differentialgleichung (†) bedient, bestehen: 1) in der Absonderung der Variablen, und 2) in der Auffindung des integrirenden Factors.

§. 91.

Absonderung der Veränderlichen.

Man trachte entweder durch blosse Umformungen, oder durch Einführung neuer veränderlicher Grössen v und w statt x und y, indem man sowohl x als auch y beliebigen Functionen von v, w gleichsetzt, der Differentialgleichung $Pdx+Qdy=0$ die Gestalt

$$\varphi(v)\,dv+\psi(w)\,dw=0$$

zu ertheilen, so, dass das Differential jeder der beiden Variablen blos mit einer Function eben dieser Grösse, mit Ausschluss der Andern, multiplicirt erscheint. Ist diese Trennung der Veränderlichen geschehen, so ergiebt sich sogleich die Integralgleichung, wenn man in

$$\int \varphi(v)\,dv + \int \psi(w)\,dw = C$$

nach verrichteter Integration der Differentialformeln φ (v) dv und ψ(w) dw die Grössen v und w wieder durch x und y ausdrückt. — Dieses Verfahren heisst das Integriren der Differentialgleichungen durch Absonderung der veränderlichen Grössen.

§. 92.

Aufsuchung des integrirenden Factors.

Wenn die Differentialgleichung $Pdx + Qdy = 0$ der Bedingungs-Gleichung der Integrabilität nicht genügt, so suche man eine solche Function von x und y, sie heisse μ, ausfindig zu machen, dass die Differentialgleichung durch Multiplication mit derselben, eine integrable Differentialformel $\mu Pdx + \mu Qdy$ darbietet. Gelingt dies, so hat man, weil die Gleichung

$$\mu Pdx + \mu Qdy = 0$$

offenbar dieselbe Relation zwischen x und y ausdrückt, welche durch die gegebene Differentialgleichung dargestellt wird, wenn man

$$\mu Pdx + \mu Qdy = dF(x, y)$$

setzt, die Integralgleichung

$$F(x, y) = C.$$

Dieses Verfahren heisst das Integriren der Differentialgleichungen durch Multiplicatoren; die dabei zu Hülfe genommene Function μ wird der integrirende Factor genannt.

Ist z. B.

$$\frac{y}{x} = a$$

die ursprüngliche Gleichung, so entsteht daraus die Differentialgleichung

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} = 0.$$

Lässt man hier den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{x^2}$ weg, so kommt

$$xdy - ydx = 0.$$

Wäre diese letzte Gleichung gegeben, so könnte man daraus nicht unmittelbar ihre primitive Gleichung herleiten, weil die linke Seite kein genaues Differential von einer Function der Variablen x und y ist. Aber sie wird es, wenn man den Factor $\frac{1}{x^2}$ wieder herstellt.

Ein solcher integrirender Factor existirt immer. Der Beweis ist folgender: Es seien

$$Pdx + Qdy = 0, \quad u = c$$

die gegebene Differentialgleichung und ihr Integral; dann muss die erstere für $\frac{dy}{dx}$ denselben Werth geben, als

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy = 0;$$

also ist nothwendig

$$\frac{\frac{du}{dx}}{P} = \frac{\frac{du}{dy}}{Q},$$

woraus folgt, wenn man diese Quotienten durch μ bezeichnet,

$$\frac{du}{dx} = \mu P, \quad \frac{du}{dy} = \mu Q, \quad du = \mu P dx + \mu Q dy.$$

Es existiren sogar immer unendlich viele integrirende Factoren für eine Differentialgleichung. Denn verwandelt sich $Pdx + Qdy$ durch Multiplication mit μ in du, wo u eine Function von x und y, so geht der genannte Ausdruck durch Multiplication mit $\mu . \varphi(u)$, wo φ eine beliebige Function der Function u anzeigt, in $\varphi(u) du$ über, d. h. er wird ebenfalls in das Differential einer Function von x und y umgestaltet.

Wir bemerken noch, dass, sobald man in einer Differentialgleichung die Variablen separiren kann, auch unmittelbar für dieselbe der integrirende Factor bekannt ist. Denn aus $Pdx + Qdy = 0$ folgt nur in so ferne $\varphi(v)dv + \psi(w)dw = 0$, als der Ausdruck $Pdx + Qdy$ durch die Einführung der neuen Variablen v, w in $\lambda[\varphi(v)dv + \psi(w)dw]$ übergeht, wobei λ eine Function von v und w anzeigt. Da nun $\varphi(v)dv + \psi(w)dw$ unmittelbar durch Differenzirung einer Function von v und w erhalten wird, so muss $\frac{Pdx + Qdy}{\lambda}$, nachdem man λ durch x und y ausgedrückt hat, ebenfalls das Differential einer Function von x und y sein. Es ist also $\frac{1}{\lambda}$ der integrirende Factor für die Differentialgleichung $Pdx + Qdy = 0$.

Hieraus folgt, dass die zweite der so eben (§. 92) erklärten Integrationsmethoden der Differentialgleichungen sich auf alle Fälle erstreckt, welche nach der ersten Methode (§. 91) behandelt werden können; da nun das Umgekehrte nicht Statt findet, so sieht man, dass die zweite Methode mehr beachtet zu werden verdient, als die erstere. Wir haben der Absonderung der Variablen auch nur deshalb erwähnt, weil sie als Mittel dienen kann, die integrirenden Factoren der Differenzialgleichungen zu entdecken, für deren Auffindung man

noch kein allgemeines Verfahren besitzt. Es ist demnach die Methode der Trennung der Veränderlichen nicht eigentlich als eine neue Methode zu betrachten.

Der integrirende Factor wird durch die Bedingungs-Gleichungen der Integrabilität bestimmt. Nämlich da jede Function μ von x und y, welche der Gleichung

$$(1) \qquad \frac{d(\mu P)}{dy} = \frac{d(\mu Q)}{dx}$$

Genüge leistet, zu einem integrirenden Factor der Differentialgleichung $Pdx + Qdy = 0$ verwendet werden kann, und zugleich durch (1) das ausschliessende Merkmal eines solchen Factors ausgesprochen wird; so hängt die Ausmittelung desselben von der Auflösung der Gleichung (1) oder der ihr gleichgeltenden

$$(2) \qquad \mu\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) + P\frac{d\mu}{dy} - Q\frac{d\mu}{dx} = 0$$

ab. Da aber die Gleichung (2), aus welcher der integrirende Factor μ gefunden werden soll, selbst eine Differentialgleichung, und noch dazu im Allgemeinen eine partielle ist, so wird sie bei dem praktischen Integriren sehr selten benutzt werden können, um μ zu finden. Nämlich die Integration dieser Gleichung (2) ist meist noch schwieriger, als die der gegebenen Differentialgleichung selbst. Daher findet man in den meisten Fällen einen solchen integrirenden Factor μ nur durch Kunstgriffe und glückliche Versuche, oder zwar aus der Gleichung (2), indem man jedoch μ von bestimmter Form voraussetzt, etwa als blosse Function von x allein, oder von y allein, und dergleichen, und zusieht, ob nicht dieser Gleichung (2) unter dieser Voraussetzung irgend wie genügt werden kann. Demnach ist es bis jetzt noch nur unter gewissen erleichternden Bedingungen möglich, diesen Factor μ vollkommen zu bestimmen.

§. 93.

Integration der totalen Differentialgleichungen mit drei Veränderlichen.

Die allgemeine Form einer totalen Differentialgleichung zwischen 3 Veränderlichen ist

$$(1) \qquad Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

wo P, Q, R Functionen von x, y, z sind. Wenn in dieser Gleichung die eine Seite eine integrable Differentialformel ist, so kommt die

Integrirung auf §. 87 zurück. Aber dieser Fall wird am seltensten stattfinden.

Soll diese Gleichung mittelst eines integrirenden Factors μ integrirt werden können, so muss es möglich sein, die Gleichung (2) des §. 92 für jedes Paar dieser Variablen zu realisiren, d. h. es müssen die Gleichungen

$$(2)\quad \begin{cases} \mu\left(\frac{dP}{dy}-\frac{dQ}{dx}\right)+P\frac{d\mu}{dy}-Q\frac{d\mu}{dx}=0 \\ \mu\left(\frac{dR}{dx}-\frac{dP}{dz}\right)+R\frac{d\mu}{dx}-P\frac{d\mu}{dz}=0 \\ \mu\left(\frac{dQ}{dz}-\frac{dR}{dy}\right)+Q\frac{d\mu}{dz}-R\frac{d\mu}{dy}=0 \end{cases}$$

zugleich bestehen können. Vereinigt man diese Gleichungen durch Addition, nachdem die erste derselben mit R, die zweite mit Q, und die dritte mit P multiplicirt ist; so erhält man die von μ freie Gleichung

$$(3)\quad R\left(\frac{dP}{dy}-\frac{dQ}{dx}\right)+Q\left(\frac{dR}{dx}-\frac{dP}{dz}\right)+P\left(\frac{dQ}{dz}-\frac{dR}{dy}\right)=0.$$

Also ist die Existenz eines solchen Factors μ, und folglich auch die Möglichkeit, das Integral der Differentialgleichung (1) durch eine Gleichung darzustellen, an die Erfüllung der Bedingung (3) gebunden. — Ist diese Bedingungs-Gleichung erfüllt, so findet man den integrirenden Factor μ aus zweien der Gleichungen (2).

Ist aber diese Bedingung nicht erfüllt, existirt also nicht eine einzige Gleichung zwischen x, y, z als Integral der Gleichung (1), so kann diese nur dadurch einen Sinn bekommen, dass man annimmt, es seien nicht zwei, sondern es sei nur eine der drei Grössen x, y, z unabhängig. In diesem Falle ist das Problem unbestimmt. Nämlich man müsste zwischen 2 Variablen, z. B. x und y irgend eine beliebige Relation annehmen, ausgedrückt durch eine zweite Gleichung $\varphi(x,y)=0$, der zufolge die gegebene Gleichung auf eine Gleichung mit nur zwei Variablen zurückgebracht würde, und also integrirt werden könnte, sobald die Function φ bestimmt ist.

§. 94.

Integration der Differentialgleichungen der ersten Ordnung, mit höheren Potenzen der Differentiale.

Die allgemeine Form einer Differentialgleichung der ersten Ordnung mit zwei Variablen x und y, in welcher höhere Potenzen von dx und dy vorkommen, ist

(1) $$dy^n + P_1\,dy^{n-1}\,dx + P_2\,dy^{n-2}\,dx^2 + \ldots + P_n\,dx^n = 0$$
oder auch, wenn man durch dx^n dividirt:
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + P_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + P_2\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \ldots + P_n = 0,$$
wobei $P_1, P_2, \ldots P_n$ im Allgemeinen Functionen von x und y sind. Da diese Gleichung in Bezug auf den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ vom n^{ten} Grade ist, so muss ihr durch n Werthe $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ dieses Quotienten, welche (im Allgemeinen) Functionen von x und y sein werden, Genüge geleistet werden, und somit lässt sie sich, vermittelst der Algebra, in n Differentialgleichungen der ersten Ordnung, welche die Differentiale von x und y blos in der ersten Potenz enthalten, nämlich in
(2) $$dy - Q_1\,dx = 0,\; dy - Q_2\,dx = 0, \ldots\; dy - Q_n\,dx = 0$$
zerfällen. Hat man die Integrale dieser Differentialgleichungen des ersten Grades gefunden, welche
(3) $$F_1(x, y, C_1) = 0,\; F_2(x, y, C_2) = 0, \ldots\; F_n(x, y, C_n) = 0$$
seien, wobei $C_1, C_2, \ldots C_n$ willkürliche Constanten vorstellen, so ist jede einzelne der Gleichungen (3) für sich, so wie auch das Product einer beliebigen Anzahl derselben als ein Integral der Differentialgleichung (1) zu betrachten. Um dem Integrale die allgemeinste Bedeutung zu geben, wird man das Product sämmtlicher n Gleichungen (3) nehmen.

Wir bemerken noch, dass man die Constanten in den Gleichungen (3) alle mit demselben Buchstaben C bezeichnen kann, was einfacher, und doch ebenso allgemein ist, weil die Gleichungen (3) einzeln bestehen.

Der Ableitung der Gleichungen (2) aus (1) stellen sich alle Schwierigkeiten entgegen, mit welchen die Auflösung der algebraischen Gleichungen verknüpft ist. Man kann denselben manchmal (in besonderen günstigen Fällen) ausweichen, wenn man der Rechnung eine andere Wendung giebt.

§. 95.

Integration der (totalen) Differentialgleichungen höherer Ordnungen.

Man betrachte die primitive Gleichung $F(x, y, a, b) = 0$, wo y eine Function von x sei, und a und b zwei Constanten sind. Von dieser Gleichung kann man zu ihrer Differentialgleichung der zweiten Ordnung auf verschiedene Arten gelangen: 1) Man differenzirt zweimal, und eliminirt darauf zwischen der Urgleichung und ihren beiden

Differentialgleichungen die Constanten a und b. 2) Man differenzirt einmal, und eliminirt dann successive a und b zwischen der Urgleichung und ihrer Differentialgleichung der ersten Ordnung, wodurch man zwei verschiedene Differentialgleichungen der ersten Ordnung erhält, von denen jede nur noch eine der beiden Constanten enthält; differenzirt man darauf jede dieser beiden Gleichungen, und eliminirt die in ihr enthaltene Constante, so führen beide zu derselben Gleichung der zweiten Ordnung, die man auf dem ersten Wege findet. — Daher hat jede Differentialgleichung der zweiten Ordnung zwei verschiedene erste Integrale, aber nur ein zweites (oder letztes) Integral.

Diese Betrachtung lässt sich leicht auf Differentialgleichungen von jeder beliebigen Ordnung zwischen zwei Veränderlichen ausdehnen. Eine primitive Gleichung und ihre successiven Differentialquotienten bis zur n^{ten} Ordnung geben $n+1$ Gleichungen, aus denen n willkürliche Constanten eliminirt werden können. Daher muss das letzte Integral einer gegebenen Differentialgleichung immer so viele willkürliche Constanten enthalten, als die Ordnungszahl der Gleichung Einheiten enthält. Man kann immer nur ein letztes vollständiges Integral finden; aber die vorhergehenden Integrale können wesentlich verschiedene Formen haben, jenachdem sie diese oder jene der Constanten des vollständigen Integrals enthalten. — Eine Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung hat immer n Integrale der nächst niedrigern Ordnung, von denen jedes eine andere willkürliche Constante enthält; alle diese Constanten müssen sich in dem allgemeinen Integrale wieder finden. Wenn die n ersten Integrale der gegebenen Gleichung bekannt wären, so könnte man daraus das n^{te} Integral oder die ursprüngliche Gleichung herleiten, indem man aus diesen n Integralen die $n-1$ Differentialquotienten $y', y'', y''', \ldots$ eliminirte.

Eine Differentialgleichung höherer Ordnung wird als integrirt betrachtet, wenn man im Stande ist, die Integration derselben auf die Integration von Differentialgleichungen niedrigerer Ordnungen zurückzuführen. — Man sucht durch wiederholte Integration einer solchen Gleichung das erste, zweite,... und endlich das letzte Integral der gegebenen Differentialgleichung zu erhalten. Durch jede Integration kommt eine unbestimmte Constante in die Rechnung. — Allgemeine Regeln lassen sich hier wenig geben. Man gestaltet oft zweckmässig um, und wendet Kunstgriffe an, welche durch die Beschaffenheit jedes individuellen Falles bestimmt werden.

§. 96.

Von den singulären Integralen der Differentialgleichungen.

Zuweilen wird einer Differentialgleichung auch durch eine Gleichung genügt, welche nicht in dem allgemeinen Integrale enthalten ist (d. h. nicht zu den particulären Integralen gehört), und man nennt dies ein singuläres Integral oder eine singuläre Auflösung.

Z. B. Von der gegebenen Differentialgleichung

$$dy^2 - xdxdy + ydx^2 = 0$$

ist das allgemeine Integral

$$y + ax + a^2 = 0$$

wo a die durch die Integration herbeigeführte Constante vorstellt; nämlich differenzirt man die letzte Gleichung, und eliminirt das a, so hat man wieder die gegebene Differentialgleichung. Aber dieser Differentialgleichung wird auch Genüge geleistet, wenn man

$$x^2 - 4y = 0$$

setzt; es ist also auch $x^2 - 4y = 0$ ein Integral derselben. Da nun die Gleichung $y + ax + a^2 = 0$ für keinen constanten Werth von a mit $x^2 - 4y = 0$ zusammenfällt (weil durch keinen constanten Werth von a die in der ersteren Gleichung nicht vorhandene Grösse x^2 in dieselbe eingeführt werden kann), so ist die letztere Gleichung ein singuläres Integral der gegebenen Differentialgleichung.

Das singuläre Integral einer Differentialgleichung erhält man aus dem allgemeinen Integrale, wenn man statt der Constante, indem man ihre Unveränderlichkeit aufhebt, eine schickliche Function der Variablen setzt.

Z. B. Im eben angeführten Falle hat man $-\frac{x}{2}$ statt a zu setzen.

Es ist ein singuläres Integral nichts Anderes, als ein Factor der gegebenen Differentialgleichung, der hervortreten würde, wenn man passende neue Veränderliche einführen wollte. Nämlich zuweilen lässt sich eine Differentialgleichung an sich, oder doch eine Umformung derselben, welche durch Einführung neuer Veränderlicher hervorgebracht ist, in zwei Factoren zerlegen, so dass sie die Form

$$u \cdot v = 0$$

annimmt. Man kann dann $u = 0$ integriren, wenn es noch keine Urgleichung ist; und auch $v = 0$ integriren. Ist aber $u = 0$ von einer niedrigeren Ordnung als $v = 0$, so nennt man $u = 0$ ein singuläres Integral der gegebenen oder umgeformten Gleichung $u.v = 0$, und das allgemeine Integral von $v = 0$ wird dann auch das allgemeine Integral von $u.v = 0$ genannt. Sollte aber $u = 0$ zufällig als ein besonderes Integral in dem allgemeinen Integral von $v = 0$ oder von

$u.v = 0$ stecken, so würde dann $u = 0$ den Namen eines singulären Werthes verlieren, eben weil es nun als ein besonderes (particuläres) Integral erkannt wird.

Z. B. Man kann die obige Gleichung

$$dy^2 - x dx dy + y dx^2 \doteq 0$$

umformen, wenn man z statt y einführt, so dass man

$$z^2 + zx = -y$$

setzt. Dadurch geht die gegebene Gleichung in

$$(x + 2z)^2 (dz^2 + dx dz) = 0$$

über, und nun genügt ihr auch

$$(x + 2z)^2 = 0 \text{ oder } x^2 - 4y = 0,$$

ohne dass diese letztere Gleichung in dem allgemeinen Integral enthalten wäre. Die Gleichung $x^2 - 4y = 0$ ist daher ein singuläres Integral der gegebenen Differentialgleichung.

§. 97.

Integriren in endlicher Form.

Für das Integriren einer Differentialgleichung $f = 0$, zwischen x und y, in endlicher Form hat man folgende Methoden:

Genügt f den Bedingungs-Gleichungen der Integrabilität, so kann man direct integriren. Wenn dies nicht unmittelbar stattfindet, so suche man durch Trennung der Veränderlichen, oder mittelst eines integrirenden Factors zu integriren.

Diese drei Methoden kann man zuweilen dann erst anwenden, wenn in die gegebene Differentialgleichung neue Veränderliche zweckmässig eingeführt sind. — Man muss zu diesem Zwecke folgende Versuche anstellen: 1) Man wird in die gegebene Differential-Gleichung $f = 0$, statt der Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... nach (§. 42) Ausdrücke setzen, welche ihnen bezüglich gleich sind, aber die Differentialquotienten $\frac{dx}{dy}$, $\frac{d^2x}{dy^2}$,.... enthalten; oder 2) Man wird eine neue Veränderliche u statt y einführen, so dass die Differentialgleichung nicht mehr y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ..., sondern blos x und u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, ... enthält; oder 3) Man wird eine neue Veränderliche u einführen, wiederum, wie so eben beschrieben ist, mittelst einer beliebig angenommenen Gleichung (zwischen x und u, oder zwischen y und u, oder) zwischen x, y und u, aber so, dass u an die Stelle

der unabhängigen Veränderlichen tritt, also dass die neue Differentialgleichung blos u, y, $\frac{dy}{du}$, $\frac{d^2y}{du^2}$, ... enthält; oder endlich 4) Man wird zwei neue Veränderliche u und v einführen (durch zwei Gleichungen zwischen x, y, u und v), und so eine neue Differentialgleichung sich verschaffen zwischen u, v, $\frac{dv}{du}$, $\frac{d^2v}{du^2}$, ..., oder zwischen v, u, $\frac{du}{dv}$, $\frac{d^2u}{dv^2}$, ...

Zuweilen führt man auch neue Veränderliche in der Absicht ein, um die gegebene Differentialgleichung in zwei Gleichungen zu zerlegen, von denen jede sich integriren lässt. — Erhält man dann 2 Urgleichungen, z. B. zwischen x, y und u, so kann man u aus beiden eliminiren, und bekommt eine Gleichung zwischen x und y. — Erhält man aber 3 Urgleichungen zwischen x, y, u, v, so kann man u und v eliminiren, und bekommt dann die Gleichung zwischen x und y.

Auch die Methode der unbestimmten Coefficienten kann zur Integration von Gleichungen aller Ordnungen versucht werden. Wenn man nämlich die Form des Integrals aus irgend Gründen voraussetzt, so braucht man nur noch die verschiedenen Coefficienten dergestalt zu bestimmen: 1) dass der gegebenen Differentialgleichung genügt wird, und 2) dass das Integral die nöthige Anzahl unbestimmter, sogenannter willkürlichen Constanten enthält; dann hat man das allgemeine Integral.

Wenn schon nur in seltenen Fällen ein Integral in endlicher Form existirt, so wird in noch seltenern Fällen dasselbe mittelst einer der hier beschriebenen Methoden gefunden; und namentlich gehört bei Einführung neuer Veränderlichen eben so viel Geschick als Glück dazu, wenn man seine Bemühungen des Integrirens mit Erfolge gekrönt sehen will. — Weil die allgemeinen Integrations-Methoden bei Differentialgleichungen noch weniger leisten, als bei den Integrationen entwickelt gegebener Functionen, so hat man hier noch mehr Ursachen, besondere Formen besonders zu betrachten. — Für die Integration der Differentialgleichungen der ersten Ordnung in endlicher Form darf man nur sehr wenig, für dieselbe Integration der Differentialgleichungen höherer Ordnungen aber darf man ausser wenigen besonderen Fällen fast gar nichts hoffen, namentlich schon deshalb, weil nur in seltenen Ausnahmsfällen solche Integrale in endlicher Form wirklich existiren.

Wenn es nicht möglich ist, die durch eine Differentialgleichung gegebene Function in endlichen Gliedern auszudrücken, so kann man diesen Ausdruck in eine unendliche Reihe entwickelt darstellen. Ist diese Reihe convergent, so kann sie ebenfalls dienen, die numerischen Werthe der gesuchten Function kennen zu lernen.

§. 98.

Integration durch Reihen.

Soll eine gegebene Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung $f=0$ (zwischen x, y und den Differentialquotienten von y nach x bis zum n^{ten}) allgemein integrirt werden, so kann man die Maclaurinsche Reihe anwenden, nach welcher jede Function y_x von x, also auch jede, welche das gesuchte Integral bildet, in folgende Reihe verwandelt wird:

$$(\dagger) \quad y = y_a + \frac{dy_a}{dx}\frac{(x-a)}{1} + \frac{d^2y_a}{dx^2}\frac{(x-a)^2}{1.2} + \frac{d^3y_a}{dx^3}\frac{(x-a)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

wo a irgend eine bestimmte Zahl (auch Null) vorstellt. Die gegebene Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung, und alle aus ihr durch fortgesetztes Differenziren (nach x) erhaltenen Gleichungen geben nun $\frac{d^ny}{dx^n}, \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}, \frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}, \ldots$ ausgedrückt durch x, y, $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ (wo sodann durchgängig a statt x zu setzen), während die Werthe der n letzteren, für $x=a$, unbestimmt und auch völlig willkürlich, jedoch (nach x) constant bleiben. Das allgemeine Integral einer Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung (zwischen zwei Veränderlichen) enthält also nothwendig n willkürliche Constanten. — Die zuweilen existirenden singulären Auflösungen müssen offenbar Coefficienten in der Reihe (†) auf die Form $\frac{0}{0}$ bringen, weil sonst dieser Werth in dem allgemeinen Integrale stecken, also den Namen eines singulären Integrales nicht verdienen würde.

Nämlich a kann wohl so gewählt werden, dass kein Coefficient der Reihe unendlich wird, wenn diese Coefficienten nur von a abhingen; aber da dieselben noch den entsprechenden Werth von y und dessen Differentialquotienten enthalten, so kann der Fall eintreten, dass eine bestimmte Function y von x, welche der Differentialgleichung völlig genügt, gewisse Coefficienten der Reihe unendlich oder unbestimmt macht, was auch a sein mag, und dann ist y ein singuläres Integral.

Sehr oft ist es einfacher und leichter, statt der Maclaurinschen Reihe, die Methode der unbestimmten Coefficienten anzuwenden. Nämlich man setze

$$y = ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + \dots$$

wo a, b, c, ..., α, β, γ, ... unbestimmte Coefficienten und Exponenten sind. Nun substituirt man diese Reihe statt y in die gegebene Differentialgleichung $f = 0$, ordnet sodann f nach Potenzen von x, und muss dann, um der Gleichung für jedes x zu genügen, alle Coefficienten einzeln gleich Null setzen. Durch diese letzteren Gleichungen werden a, b, c, ..., α, β, γ, ... bestimmt.

Wenn die Exponenten ganze positive Zahlen sind, so ist das Resultat dasselbe, wie bei der Maclaurinschen Reihe.

Das Verfahren, durch Reihen zu integriren, ist zwar allgemein, ebenso wie die Formel (§. 71), aber die Reihe muss für numerische Berechnungen convergiren (was selten und nur in engen Grenzen stattfindet). Ausserdem ist es übel, dass man auf diesem Wege zu unendlichen Reihen auch in den Fällen geführt wird, wo ein Integral in endlicher Form existirt.

In den Anwendungen auf physikalisch-mathematische Probleme giebt die Natur des Gegenstandes häufig die Form der Reihe an, welche man wählen muss, um convergente Reihen zu haben.

Wir bemerken noch, dass in den Anwendungen auf Physik gewöhnlich lineare Differentialgleichungen vorkommen, d. h. solche, welche von der Function und ihren Differentialquotienten weder höhere Potenzen als die erste, noch Producte enthalten. Dies kommt daher, dass hier die zu bestimmende Function und ihre Differentialquotienten nach der Natur der Erscheinung immer sehr klein bleiben müssen, so dass man die Producte und die höheren Potenzen dieser Grössen gleich anfangs vernachlässigen kann. Man hat häufig in den physikalisch-mathematischen Problemen nur kleine Correctionen zu schon bekannten Näherungs-Werthen zu bestimmen, so dass dann die Differentialgleichung selber schon eine einfachere Gestalt annimmt, und daher leichter behandelt werden kann.

§. 99.

Bestimmung der Constanten bei den Anwendungen der Integrale.

Wir erwähnen noch, wie in den verschiedenen Anwendungen die während der Integration eingegangenen unbestimmten Constanten näher bestimmt werden.

Gewöhnlich kennt man nämlich bei den Anwendungen den Werth $y = b$, der zu einem Werthe $x = a$ gehört. Ist nun

$$F(x, y, c) = 0$$

das gefundene Integral, so muss $F(a, b, c) = 0$ identisch werden, und aus dieser letztern Gleichung findet sich dann c; und der gefundene Werth von c bleibt für alle die Werthe von x gültig, für welche y seine Stetigkeit nicht ändert.

Hat das Integral, weil es von einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung herrührt, zwei willkürliche Constanten aufgenommen, so muss man nicht blos den Werth $y = b$, sondern auch den Werth $\frac{dy}{dx} = \beta$ kennen, der in diesem Falle der Anwendung, zu $x = a$ gehört. Indem man dann dies Integral

$$F(x, y, c, c') = 0$$

differenzirt, also $\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0$ erhält, so müssen diese beiden Gleichungen identisch werden, wenn man in ihnen a statt x und gleichzeitig b und β statt bezüglich y und $\frac{dy}{dx}$ substituirt. Aus den dadurch entstehenden beiden Gleichungen kann man nun aber die beiden Constanten c und c' so bestimmen, wie sie sein müssen, damit diesen letztern Bedingungen genügt werde.

§. 100.

Integration gleichzeitiger Differentialgleichungen zwischen mehreren Functionen.

Sind zwei Gleichungen zwischen $x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots$ zu integriren, so kann man, um daraus y und z selbst als Functionen von x zu finden, verschiedene Methoden befolgen.

I. Man kann versuchen, jede der gegebenen Gleichungen direct zu integriren, ohne vorher zu eliminiren, entweder insofern sie den Bedingungs-Gleichungen der Integrabilität genügen, oder, weil sie mittelst eines integrirenden Factors integrabel gemacht werden können.

II. Man eliminirt aus beiden gegebenen Gleichungen eine der unbekannten Functionen, z. B. y, mit allen ihren Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$, nach §. 43, und versucht dann die entstehende Gleichung (zwischen x, z und dessen Differentialquotienten)

zu integriren. Ist dies geschehen, und hat das Integral alle willkürlichen Constanten aufgenommen, die es aufnehmen kann, so substituirt man diesen Ausdruck für z und die zugehörigen Ausdrücke für $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, ... in die übrigen Gleichungen und eliminirt dann aus letzteren $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ..., so dass nur noch y selbst darin bleibt. So bekommt man also zuletzt y selbst durch x und durch dieselben willkürlichen Constanten ausgedrückt, ohne aufs Neue integriren zu müssen, also auch ohne neue willkürliche Constanten.

Es ist leicht, diese Methoden auf die Integration von mehr Differential-Gleichungen zwischen mehreren unbekannten Functionen auszudehnen.

Die in der gemeinen Algebra schon gegebene Regel, dass man nämlich aus den gegebenen Gleichungen durch algebraische Combinationen erst neue und bequemere Gleichungen bildet, ehe man an das weitere Geschäft des Auflösens (oder Integrirens) geht, findet natürlich auch hier Statt.

III. Sind die gleichzeitig gegebenen Differential-Gleichungen linear, so hat man auch die Methode der unbestimmten Multiplicatoren auf sehr sinnreiche Weise angewandt. Z. B. Sind zwei lineare Gleichungen von der ersten Ordnung zwischen den drei Veränderlichen x, y, z gegeben, so kann man sie auf die folgende Form bringen:

(1) $$\frac{dy}{dx} + Pz + Qy = T$$

(2) $$\frac{dz}{dx} + P_1z + Q_1y = T_1$$

wo P, Q, P_1, Q_1, T und T_1 Functionen von x sind. Man multiplicirt nun (um diese Gleichungen zu integriren, ohne den Weg der Elimination betreten zu wollen), die Gleichung (1) mit einer unbestimmten Function ϑ von x, und addirt solche zur (2). Dadurch erhält man, wenn noch statt z eine neue Veränderliche t eingeführt wird, mittelst der Gleichung

(3) $$z = t - \vartheta y, \text{ also } \frac{dz}{dx} = \frac{dt}{dx} - y\frac{d\vartheta}{dx} - \vartheta\frac{dy}{dx}$$

das Resultat:

(4) $$\frac{dt}{dx} + (P + P_1\vartheta)t - y\left(\frac{d\vartheta}{dx} + (P + P_1\vartheta)\vartheta - (Q + Q_1\vartheta)\right) = T + T_1\vartheta.$$

Da man nun über ϑ beliebig disponiren kann, so setzt man hier den Coefficienten von y der Null gleich. Dies giebt

(5) $$\frac{dt}{dx} + (P + P_1\vartheta)t = T + T_1\vartheta$$

$$(6) \qquad \frac{d\vartheta}{dx} + (P + P_1\vartheta)\,\vartheta - (Q + Q_1\vartheta) = 0.$$

Kann man nun versuchsweise, oder auf sonst eine Art, einen der Gleichung (6) genügenden Werth von ϑ finden, so giebt die Gleichung (5) sogleich t dazu, wodurch die Gleichung (3) in eine Urgleichung zwischen z und y und einer willkürlichen Constante übergeht. Findet man daraus z in y, und setzt dies statt z in die Gleichung (1), so erhält man eine neue lineare Gleichung zwischen x, y und $\frac{dy}{dx}$, welche, aufs Neue integrirt, noch y in x dazu liefert, mit der zweiten willkürlichen Constante. — Könnte man die Gleichung (6) allgemein integriren, so dass ϑ schon eine willkürliche Constante in sich aufnähme, so würde man y aus der Gleichung (2) ohne weitere Integration sich verschaffen, weil man dann schon die zwei willkürlichen Constanten hätte, welche durch das Integriren der beiden gegebenen Gleichungen (1) und (2) eingehen müssen.

Aehnlich verfährt man bei mehreren gleichzeitigen linearen Gleichungen.

Als Anhang zur Betrachtung der Differentialgleichungen folgen die beiden nächsten Paragraphen.

§. 101.

Charakterisirung der transcendenten einfachen Functionen mittelst Differentialgleichungen.

Im Allgemeinen werden die Functionen in ihrem ganzen Verlaufe durch das Gesetz ihrer Differentiale charakterisirt.

Aus Früherem folgt:

Die Differentialgleichung $dy = y dx$ in Verbindung mit der Bedingung, dass x für $y = 1$ verschwindet, drückt den wesentlichen Charakter der beiden transcendenten Functionen, nämlich der Exponentialfunction $y = e^x$, und der logarithmischen Function $x = ly$ aus (definirt also diese Functionen), indem sie das sehr einfache Gesetz bestimmt, nach welchem diese Funtionen sich stetig ändern. Man hat auch:

$$ly = \int^y \frac{dy}{y}.$$

Also

$$\int_1^e \frac{dy}{y} = 1.$$

Die Function $y = \sin x$ wird durch die Bedingung charakterisirt, dass sie zugleich mit x verschwindet, und der Differential-Gleichung

$$dy = dx\sqrt{1-y^2}$$

genügt, welche das Gesetz ausdrückt, wonach die Function stetig zunimmt. Man kann auch setzen:

$$\text{arc}\sin y = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

Also
$$\frac{1}{2}\pi = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Wir bezeichnen:

$$e^x = f(x),\quad \sin x = \varphi(x),\quad \cos x = \psi(x).$$

Alle Eigenschaften dieser drei Functionen könnte man aus dem Systeme der Gleichungen:

$$f(0) = 1;\ \varphi(0) = 0;\ \psi(0) = 1;$$
$$f'(x) = f(x);\varphi'(x) = \psi(x);\ \psi'(x) = -\varphi(x)$$

ableiten.

§. 102.

Anwendung der Differentialgleichungen zur Erforschung solcher Functionen, von denen man gewisse charakteristische Eigenschaften kennt.

I. Man soll eine Function $z = f(x)$ von solcher Beschaffenheit finden, dass für jeden Werth von x und y

(1) $$f(x) + f(y) = f(x+y)$$

ist. Differenzirt man diese Gleichung nach x, indem man y als constant betrachtet, so erhält man

$$f'(x) = f'(x+y);$$

woraus man schliesst, dass $f'(x)$ constant ist, was auch x sein mag, und also

$$\frac{dz}{dx} = a$$

ist, wo a eine Constante bezeichnet. Daraus folgt

(2) $$z = ax + b,$$

wo b eine neue Constante ist. Man muss nun die Constanten a und b so zu bestimmen suchen, dass die Substitution von z die Gleichung (1) identisch macht. Das Resultat dieser Substitution ist

$$ax + b + ay + b = a(x+y) + b$$

wonach $b = 0$ sein muss, also $z = ax$. Die allgemeinste Lösung der Aufgabe wird demnach durch die Formel

$$f(x) = ax$$

gegeben, wo a eine willkürliche Constante ist.

II. Wir suchen nun diejenige Function, welche durch die allgemeine Bedingung

$$(1) \qquad f(x) + f(y) = f(xy)$$

bestimmt ist. Differenzirt man diese Gleichung nach x, und dann nach y, so erhält man

$$f'(x) = y f'(xy); \quad f'(y) = x f'(xy).$$

Daraus folgt

$$x f'(x) = y f'(y);$$

also das Product $x f'(x)$ ist constant (von x unabhängig), so dass, wenn $f(x) = z$ gesetzt wird, und a eine Constante bezeichnet, man $x \frac{dz}{dx} = a$ hat, das ist

$$dz = \frac{a\,dx}{x}, \quad z = a\,lx + b,$$

wo b eine neue Constante ist. Wird in die Gleichung (1) substituirt, so findet sich

$$(2) \qquad a\,lx + b + a\,ly + b = a\,l(xy) + b;$$

$$\text{also } b = 0 \text{ und } z = a\,lx,$$

wo a willkürlich ist. Folglich wird die allgemeinste Lösung der Aufgabe durch die Formel

$$f(x) = log\,x$$

gegeben, wo die Basis des logarithmischen Systemes beliebig ist.

III. Es werde nun eine Function $f(x)$ gesucht, welche durch die Gleichung

$$(1) \qquad f(x) . f(y) = f(x + y)$$

charakterisirt wird. Differenzirt man diese Gleichung in Beziehung auf x und auf y, so erhält man:

$$f'(x) f(y) = f'(x + y)$$
$$f(x) f'(y) = f'(x + y),$$

woraus

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(y)}{f(y)} = a$$

folgt, wo a eine Constante ist. Wenn man nun $f(x) = z$ setzt, so hat man

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{dz}{dx} = a,$$

folglich

$$\frac{dz}{z} = a dx, \quad l\frac{z}{b} = ax, \quad z = be^{ax},$$

wo b constant ist. Substituirt man in die Gleichung (1), so erhält man

(2) $$be^{ax} \cdot be^{ay} = be^{a(x+y)}$$

wonach erfordert wird, dass $b^2 = b$, also $b = 1$ sei, denn man wird nicht $b = 0$ nehmen. Die gesuchte Function ist also

$$f(x) = e^{ax}$$

wo a willkürlich ist.

IV. Es sei die Bedingung

(1) $$f(x) f(y) = f(xy)$$

gegeben. Differenzirt man diese Gleichung nach x und y, so erhält man

$$f'(x)\, f(y) = y f'(xy)$$
$$f(x)\, f'(y) = x f'(xy).$$

Diese beiden Gleichungen geben

$$x f'(x) f(y) = y f'(y) f(x);$$

also

$$\frac{x f'(x)}{f(x)} = \frac{y f'(y)}{f(y)} = a,$$

wo a eine Constante ist. Setzt man nun $f(x) = z$, so hat man

$$\frac{x}{z}\frac{dz}{dx} = a;$$

woraus folgt

$$\frac{dz}{x} = a\frac{dx}{x}, \quad l\frac{z}{b} = a l x = l(x^a)$$

wo b eine Constante ist. Man erhält also

$$z = bx^a.$$

Substituirt man in die Gleichung (1), so bekommt man

(2) $$bx^a \cdot by^a = bx^a y^a;$$

also $b = 1$, und die gesuchte Function wird durch

$$f(x) = x^a$$

ausgedrückt, wo a eine beliebige Constante ist.

*§. 103.

Erklärung der partiellen Differentialgleichung. Ihr Integral führt willkürliche Functionen ein.

Eine Gleichung, in welcher eine Function u, zwei oder mehrere unabhängig Variable x, y, z, ... und beliebige partielle Differentialquotienten dieser Function, nämlich $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, \ldots \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^2u}{dxdy}, \frac{d^2u}{dy^2}, \frac{d^2u}{dxdz}, \ldots \frac{d^3u}{dx^3}, \ldots$ vorkommen, heisst eine partielle Differentialgleichung, oder eine Gleichung mit partiellen Differentialen.

Soll von partiellen Differentialen einer Grösse überhaupt die Rede sein können, so muss dieselbe eine Function wenigstens zweier Variablen sein. Es wird sich demnach eine Gleichung mit partiellen Differentialen wenigstens auf drei veränderliche Grössen beziehen.

Wenn eine Differentialgleichung zwischen drei Veränderlichen x, y, z, ausser diesen Veränderlichen blos noch Differentialquotienten von z nach x allein enthält, so braucht man solche nicht als eine partielle anzusehen, sondern es ist eine totale Differentialgleichung zwischen den beiden Veränderlichen x und z, die auch noch das als constant betrachtete y enthält, gerade so wie sie noch mehrere solche Constante a, b, c, ... enthalten kann.

Ist eine Gleichung mit partiellen Differentialen gegeben, und wird nun gefordert, diese Abhängigkeit des u von x, y, z, ... durch eine Gleichung darzustellen, in welcher blos diese Grössen erscheinen, so hat man es mit der Integration einer partiellen Differentialgleichung zu thun; hier will man alle Functionen u finden, welche statt u gesetzt die gegebene Differentialgleichung identisch machen.

Wie jede einmalige Integration einer totalen Differentialgleichung immer eine willkürliche Constante einführt; so führt die Integration einer partiellen Differentialgleichung allemal eine willkürliche Function der Veränderlichen ein, welche dann, gerade wie bisher die willkürliche Constante, in den verschiedenen Fällen der Anwendung erst ihre nähere Bestimmung erfahren muss.

§. 104.

Endliche Form des allgemeinen Integrals einer partiellen Differentialgleichung der ersten Ordnung zwischen 3 Veränderlichen.

Ist

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right) = 0$$

eine beliebig gegebene Gleichung zwischen den beiden unabhängig Veränderlichen x, y, zwischen der gesuchten Function z von x und y, und deren beiden partiellen Differentialquotienten $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$, so ist dieses eine partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung zwischen 3 Veränderlichen. Ihr allgemeines Integral drückt z aus durch x und y und noch eine willkürliche Function $\varphi(\omega)$ von ω, während ω eine völlig bestimmte Function von x und y ist, die natürlich auch noch z selbst in sich aufnehmen kann.

In der That, wenn man eine Gleichung

(1) $$F[x, y, z, \varphi(\omega)] = 0$$

partiell nach x und nach y differenzirt, so erhält man die beiden Differentialgleichungen:

(2) $$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{dF}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\omega}\left(\frac{d\omega}{dx} + \frac{d\omega}{dz}\frac{dz}{dx}\right) = 0$$

(3) $$\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy} + \frac{dF}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\omega}\left(\frac{d\omega}{dy} + \frac{d\omega}{dz}\frac{dz}{dy}\right) = 0.$$

Aus diesen drei Gleichungen kann man sowohl $\varphi(\omega)$ als auch $\frac{d\varphi}{d\omega}$ eliminiren, so dass jede Spur von $\varphi(\omega)$ verschwindet. Dadurch erhält man eine Gleichung blos zwischen x, y, z, $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$, welche die willkürliche Function φ nicht mehr enthält, und welche die partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung sein muss, von welcher die Gleichung (1) das allgemeine Integral ist. Diese Differentialgleichung wird eine Relation ausdrücken, welche bei jeder Form besteht, die man in der primitiven Gleichung (1) der Function φ geben mag.

Es ist kaum nöthig zu bemerken, dass ein analoges Verfahren bei Gleichungen mit nur zwei Veränderlichen, wo also partielle Differentiale nicht auftreten können, nicht ausführbar ist. Nämlich aus der Gleichung

$$F[x, y, \varphi(\omega)] = 0$$

erhält man durch Differenziren die einzige Gleichung

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\omega}\frac{d\omega}{dx} = 0$$

so dass man nur 2 Gleichungen hat, zwischen welchen sich die 2 Grössen $\varphi(\omega)$ und $\frac{d\varphi}{d\omega}$ keineswegs beide eliminiren lassen; denn die Anzahl zu eliminirender Grössen muss immer wenigstens um Eins kleiner sein, als die Zahl der Gleichungen, welche zur Elimination gegeben sind.

Wir fügen hierzu einige Beispiele:

Das allgemeine Integral der Gleichung

$$\frac{dz}{dx} - \frac{dz}{dy} = 0$$

ist

$$z = \varphi(x + y).$$

Das Integral der Gleichung

$$\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} = 0$$

ist

$$z = \varphi(x - y).$$

Von der Gleichung

$$x\frac{dz}{dx} - y\frac{dz}{dy} = 0$$

ist das allgemeine Integral

$$z = \varphi(x . y).$$

Von der Gleichung

$$x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} = 0$$

ist das Integral:

$$z = \varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

Das allgemeine Integral der Gleichung

$$a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} = 1$$

ist

$$y - bz = \varphi(x - az)$$

das ist die Cylindergleichung.

Nämlich wird diese Gleichung partiell differenzirt, so erhält man, wenn φ' den ersten Differentialquotienten von φ bezeichnet,

$$-b\frac{dz}{dx} = \left(1 - a\frac{dz}{dx}\right)\varphi'$$

$$1 - b\frac{dz}{dy} = -a\frac{dz}{dy} . \varphi'$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen φ', so bekommt man jene Differentialgleichung.

Das allgemeine Integral der Gleichung

$$z - c = (x - a)\frac{dz}{dx} + (y - b)\frac{dz}{dy}$$

ist

$$\frac{y-b}{z-c} = \varphi\left(\frac{x-a}{z-c}\right)$$

das ist die Kegelgleichung.

Nämlich differenzirt man die letzte Gleichung partiell in Bezug auf x und y, so erhält man:

$$\frac{dz}{dx}\left[(x-a)\varphi' - (y-b)\right] = (z-c)\varphi'$$

$$\frac{dz}{dy}\left[(x-a)\varphi' - (y-b)\right] = -(z-c).$$

Eliminirt man aus diesen zwei Gleichungen φ', so erhält man wieder jene Differentialgleichung.

§. 105.

Umformung des Integrals in eine Reihe.

Das im vorigen Paragraphen betrachtete allgemeine Integral lässt sich auch umformen. Nämlich denkt man sich in einem solchen Integrale die Function z (von x und y) in eine nach Potenzen von x, oder nach Potenzen einer Function $\vartheta(x)$ fortlaufende Reihe verwandelt, so haben natürlich die Coefficienten dieser Reihe nicht selbst noch x, sondern können nur Functionen von y allein enthalten. Aus der willkürlichen Function $\varphi(\omega)$, wo ω eine gegebene Function von x und y ist, gehen also nun, weil die Entwickelung mittelst der Maclaurinschen Reihe erfolgen kann und muss, die einzelnen Coefficienten der Reihe mit hervor, welche letztere deshalb aus einer willkürlichen Function von y allein, und aus deren Differentialquotienten (nach y) zusammengesetzt sein werden. — Man kann aber auch diesen allgemeinsten Werth von z, nach Potenzen von y, oder nach Potenzen einer Function $\vartheta(y)$ von y, in eine Reihe entwickelt sich denken; dann enthalten die Coefficienten blos eine willkürliche Function von x, und deren Differentialquotienten (nach x).

Man kann auch so umformen, dass die willkürliche Function blos durch willkürliche Constanten vertreten wird. Nämlich man kann denselben allgemeinsten Werth von z (mittelst der Maclaurinschen Reihe für zwei Veränderliche) auch in eine Doppel-Reihe entwickelt sich denken, welche in einer Richtung nach Potenzen von x, in einer andern Richtung nach Potenzen von y, oder in der erstern Richtung nach Potenzen von $\vartheta(x)$, in der andern dagegen nach Potenzen von $\vartheta(y)$ fortlauft. In diesem Falle können die Coefficienten

dieser Reihe weder x noch y enthalten; sie werden also eine Reihe willkürlicher Constanten in sich aufnehmen, die jedoch in den Coefficienten der Reihe auf eine bestimmte Weise in Verbindung treten, so dass man nicht alle Coefficienten der Doppel-Reihe ganz beliebig unbestimmt annehmen kann.

§. 106.

Besondere Integrale.

In dem allgemeinen Integrale mit der willkürlichen Function $\varphi(\omega)$, sowie in allen seinen Umformungen sind nun alle besonderen (particulären) Integrale enthalten, und letztere gehen aus ersterem hervor, wenn man der willkürlichen Function $\varphi(\omega)$ eine bestimmte Function (mit beliebig vielen constanten Coefficienten) unterlegt. Jede partielle Differentialgleichung hat unendlich viele besondere Integrale.

Erst wenn die allgemeinen Resultate auf besondere Fälle ihre Anwendung finden, lassen sich die willkürlichen Functionen, welche die Integration einführt, nach den verschiedenen Nebenbedingungen der Aufgabe näher bestimmen.

§. 107.

Form des allgemeinen Integrals einer partiellen Differentialgleichung der ersten Ordnung zwischen vier, fünf und mehr Veränderlichen.

I. Wir betrachten nun eine partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung zwischen vier Veränderlichen, nämlich die Gleichung

$$f\left(x, y, z, u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}\right) = 0.$$

Sie hat ein allgemeines Integral mit einer willkürlichen Function $\varphi(\omega, \omega')$ zweier Veränderlichen ω und ω', während letztere bestimmte Functionen von x, y und z sind, die jedoch auch u in sich aufnehmen können. Das allgemeine Integral muss also allemal die Form

$$F(x, y, z, u, \varphi) = 0$$

haben, weil nur dann aus

$$F = 0, \frac{dF}{dx} = 0, \frac{dF}{dy} = 0, \frac{dF}{dz} = 0$$

die willkürlichen φ, $\frac{d\varphi}{d\omega}$, $\frac{d\varphi}{d\omega'}$ und somit Alles, was von dieser willkürlichen Function φ herrührt, eliminirt werden kann, so dass eine Differentialgleichung der ersten Ordnung sich ergiebt, welche die gegebene $f=0$ sein muss.

In Reihen umgeformt wird dasselbe u statt der willkürlichen Function $\varphi(\omega, \omega')$ blos willkürliche Functionen von zweien, oder gar nur von einer der unabhängigen Veränderlichen, ja vielleicht blos willkürliche constante Werthe in sich aufnehmen, jedoch auf eine völlig bestimmte Weise, so dass neben der Willkürlichkeit der Coefficienten bereits auch eine bestimmte Beschränkung vorhanden ist.

II. Ferner wird das allgemeine Integral einer Gleichung der ersten Ordnung zwischen fünf Veränderlichen, nämlich der Gleichung

$$f\left(x, y, z, t, u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, \frac{du}{dt}\right)=0$$

eine willkürliche Function $\varphi(\omega, \omega', \omega'')$ in sich aufnehmen, während ω, ω', ω'' völlig bestimmte Functionen sind von x, y, z und t, welche selbst noch u enthalten können.

U. s. w.

Beispiele sind folgende:

Das allgemeine Integral von

$$(y-z)\left(x\frac{du}{dx}-u\right)+yz\left(\frac{du}{dy}-\frac{du}{dz}\right)+x\left(z\frac{du}{dz}-y\frac{du}{dy}\right)=0$$

ist

$$u=x\phi(\omega, \omega'), \text{ wo } \omega=xyz, \ \omega'=x+y+z.$$

Das allgemeine Integral von

$$x\frac{du}{dx}+y\frac{du}{dy}+z\frac{du}{dz}+t\frac{du}{dt}=au$$

ist

$$u=x^a\phi(\omega, \omega', \omega''), \text{ wo } \omega=\frac{y}{x}, \ \omega'=\frac{z}{x}, \ \omega''=\frac{t}{x}.$$

§. 108.

Endliche Form des allgemeinen Integrals einer partiellen Differentialgleichung der zweiten Ordnung.

Eine partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung enthält 3, 4, 5, ... n Veränderliche, und ausser den ersten auch die zweiten partiellen Differentialquotienten einer der Veränderlichen als Function der n — 1 übrigen. Z. B.

$$f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dxdy}, \frac{d^2z}{dy^2}\right) = 0$$

ist eine partielle Differentialgleichung der zweiten Ordnung zwischen 3 Veränderlichen; u. s. w. Von einer partiellen Differentialgleichung der zweiten Ordnung wird ihr allgemeines Integral (das ist eine Gleichung zwischen den n Veränderlichen), wenn es überhaupt in endlicher d. i. geschlossener (algebraischer oder transcendenter) Form ausgedrückt werden kann, zwei willkürliche Functionen φ, ψ der Veränderlichen in sich aufnehmen, jedoch wiederum nicht ganz willkürlich, sondern in solcher Form, dass aus dieser Urgleichung und ihren partiellen Differentialgleichungen bis zur zweiten Ordnung, Alles, was von diesen willkürlichen Functionen herrührt, eliminirt werden kann, so dass die gegebene Differentialgleichung der zweiten Ordnung wieder erhalten wird.

Beispiele sind folgende:

Die Gleichung

$$\frac{d^2z}{dxdy} = 0$$

hat das allgemeine Integral

$$z = \varphi(x) + \psi(y).$$

Die Gleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{d^2z}{dy^2} = 0$$

hat das Integral

$$z = \varphi(x + y) + \psi(x - y).$$

Von der Gleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2} = 0$$

ist das allgemeine Integral

$$z = \varphi(x + y\sqrt{-1}) + \psi(x - y\sqrt{-1}).$$

Das allgemeine Integral der Gleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2} = a^2\frac{d^2z}{dy^2}$$

ist

$$z = \varphi(y + ax) + \psi(y - ax)$$

das ist die Gleichung der schwingenden Saiten.

In der That giebt die letzte Gleichung, wenn man sie partiell differenzirt,

$$\frac{dz}{dx} = a\varphi' - a\psi'; \quad \frac{d^2z}{dx^2} = a^2\varphi'' + a^2\psi''$$

$$\frac{dz}{dy} = \varphi' + \psi' \; ; \quad \frac{d^2z}{dy^2} = \varphi'' + \psi''$$

so dass also wieder:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = a^2 \cdot \frac{d^2z}{dy^2}.$$

Das allgemeine Integral von

(1) $$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 = \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2},$$

welches die Gleichung der abwickelbaren Flächen ist, wird durch das System der zwei Gleichungen

(2) $$z = \omega + x\varphi(\omega) + y\psi(\omega)$$

(3) $$0 = 1 + x\varphi'(\omega) + y\psi'(\omega)$$

dargestellt, wo ω in der ersten eine durch die zweite bestimmte Function von x und y ist. Dabei stellen $\varphi'(\omega)$ und $\psi'(\omega)$ die Differentialquotienten $\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$ und $\frac{d\psi(\omega)}{d\omega}$ vor.

Nämlich wird die Gleichung (2) partiell differenzirt nach x und y, so erhält man

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d\omega}{dx} + \phi(\omega) + x\phi'(\omega)\frac{d\omega}{dx} + y\psi'(\omega)\frac{d\omega}{dx}$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d\omega}{dy} + x\phi'(\omega)\frac{d\omega}{dy} + \psi(\omega) + y\psi'(\omega)\frac{d\omega}{dy}$$

welche beide Gleichungen durch ihre Verbindung mit (3) sich auf

$$p = \phi(\omega), \quad q = \psi(\omega)$$

reduciren, wo $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ mit p, q bezeichnet sind. Nun lässt die Elimination von ω sich ausführen und man erhält durch sie

(4) $$p = \chi(q)$$

welches die Gleichung mit partiellen Differentialen der ersten Ordnung für das System (2, 3) ist, und in welcher nur eine einzige willkürliche Function vorkommt. Um nun auch diese letzte vollends zu vertilgen, differenzire man die Gleichung (4) in Bezug auf x und y, wodurch man erhält, wenn $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ mit r, s, t bezeichnet werden,

$$r = \chi'(q) \cdot s; \quad s = \chi'(q) \cdot t$$

woraus durch Division die Gleichung (1)

$$rt = s^2$$

wieder erhalten wird, als die Gleichung mit partiellen Differentialen der zweiten Ordnung, welche dem Systeme (2, 3) angehört.

§. 109.

Integral einer partiellen Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung.

Das allgemeine Integral einer partiellen Differentialgleichung der n^{ten} **Ordnung**, wenn es in endlicher Form erscheint, nimmt n

willkürliche Functionen in sich auf, doch sind diese nicht völlig willkürlich. Denn wären sie es, so müsste man immer n völlig willkürliche Functionen durch partielles Differenziren bis zur nten Ordnung eliminiren können, was aber nicht immer angeht, wie man sich sogleich überzeugt. Z. B. Es sei $u = 0$ eine Gleichung, welche nebst den Veränderlichen x, y, z zwei willkürliche Functionen $\varphi(s)$, $\psi(t)$ der in x, y und z gegebenen Grössen s und t enthält. Geht man zu den ersten und zweiten Differentialen über, so erhält man noch fünf Gleichungen, nämlich

$$\frac{du}{dx} = 0, \frac{du}{dy} = 0,$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0, \frac{d^2u}{dxdy} = 0, \frac{d^2u}{dy^2} = 0,$$

wodurch noch vier, von den zwei willkürlichen Functionen herrührende, unbestimmte Ausdrücke

$$\frac{d\varphi(s)}{ds}, \frac{d\psi(t)}{dt}, \frac{d^2\varphi(s)}{ds^2}, \frac{d^2\psi(t)}{dt^2}$$

eingeführt sind. Man hat also sechs unbestimmte und willkürliche Ausdrücke, d. i. eben so viele, als Gleichungen vorhanden sind, zu eliminiren, was nur in dem Falle gelingen kann, wo, wegen der besonderen Form der Gleichung $u = 0$, d. h. wegen der Art und dem Verhalten von φ und ψ in der primitiven Gleichung $u = 0$, die 6 unbestimmten Ausdrücke auf nur 5 sich zurückführen lassen. Und ähnlich in anderen Fällen.

§. 110.

Die willkürlichen Functionen.

Das allgemeine Integral einer gegebenen Differentialgleichung enthält, wenn dieselbe eine totale ist, eine oder mehrere willkürliche Constanten, und wenn die Gleichung eine partielle ist, eine oder mehrere willkürliche Functionen.

Es ist charakteristisch für die partiellen Differentialgleichungen, dass hier eine willkürliche Function an die Stelle einer einfachen willkürlichen Constante tritt, um den entsprechenden Integralen die gehörige Allgemeinheit zu geben. Die Integrirung partieller Differentialgleichungen bildet einen eigenthümlichen Zweig der Analysis, und zwar den schwierigsten Theil der Integralrechnung.

Eine willkürliche Function kann regulär sein; aber sie kann auch irregulär sein d. h. das Gesetz ihres Fortganges ändern, indem sie

bald diese bald jene Function ist. Während also die gewöhnlichen Integrationen nur reguläre Functionen zulassen, können in der Rechnung mit partiellen Differentialen auch irreguläre Functionen erscheinen. Dadurch bietet diese Rechnung ein Mittel dar, auch irreguläre Functionen ins Gebiet der Analysis zu ziehen.

Man nennt oft, wie schon bemerkt, eine irreguläre Function discontinuirlich, aber dies Wort kann einen Irrthum veranlassen.

§ 111.

Bestimmung der besonderen Integrale bei der Anwendung.

Aus einem allgemeinen Integrale gehen alle besonderen hervor, wenn den willkürlichen Functionen φ, ψ ganz bestimmte, aber beliebige untergelegt werden.

Bei der Anwendung bestimmt sich das besondere Integral dadurch, dass es auch noch allen Nebenbedingungen der Aufgabe, die in der Differentialgleichung noch nicht ausgesprochen sind, zu genügen hat. Wird man nun in der Anwendung zu einer Differentialgleichung geführt, so muss man unter allen verschiedenen Integralen derselben für jeden besonderen Fall dasjenige heraussuchen, welches noch den übrigen, diesen Fall von jedem andern unterscheidenden, Bedingungen entspricht; d. h. in jedem besondern Falle der Anwendung kann man erst die willkürlichen Constanten oder die willkürlichen Functionen so bestimmen, dass das Integral auch noch den letztern (Neben-) Bedingungen der Aufgabe genügt. So wie bei der Integration totaler Differentialgleichungen die Constanten den besonderen Bedingungen einer Aufgabe gemäss bestimmt werden, so geschieht dies auch bei der Bestimmung der willkürlichen Functionen, die in den Integralen der partiellen Differentialgleichungen an die Stelle jener Constanten treten. So wie nämlich in den Anwendungen die eingehenden willkürlichen Constanten bei totalen Differentialgleichungen allemal dadurch bestimmt werden, dass man zusammengehörige bestimmte Werthe der Veränderlichen und ihrer Differentiale kennt, und diese in die Integralgleichungen substituirt, um Gleichungen blos zwischen den Constanten und bestimmten Werthen zu haben; ebenso muss man die bei der Integration der partiellen Differentialgleichungen eingehenden willkürlichen Functionen dadurch zu bestimmen trachten, dass man noch aus den Nebenbedingungen der Aufgabe besondere Gleichungen zwischen den Veränderlichen x, y, z, ... sich verschafft, denen das Integral genügen, d. h. mit denen das Integral zusammenfallen muss.

§. 112.

Integrale in endlicher Form.

Die Auffindung der Integrale gegebener partieller Gleichungen ist meist mit den grössten Schwierigkeiten verbunden, so dass von allgemeinen Integrations-Methoden in endlicher Form hier fast gar nicht die Rede sein kann. Nimmt man eine kleine Anzahl partieller Differentialgleichungen aus, so können die, welche von einer höheren Ordnung als die erste sind, nicht unter endlicher Form integrirt werden, selbst wenn es lineare Gleichungen sind. Wenn die Integration partieller Differentialgleichungen in endlicher Form möglich ist, so beruht sie im Allgemeinen darauf, dass man sie zurückzuführen sucht auf die Integration totaler Differentialgleichungen; und vorher versucht man Gleichungen mit höheren Potenzen der partiellen Differentialquotienten auf Gleichungen vom ersten Grade (lineare), und Gleichungen mit partiellen Differentialen höherer Ordnungen auf niedrigere Ordnungen zu reduciren.

Da eine partielle Differentialgleichung zum Stellvertreter des Integrals in endlicher Form auch ein System von 2 oder mehr Gleichungen, oder ein solches Integral haben kann, welches noch Differential- oder Integralformen (neben den Ur-Formen) in sich aufnimmt, so geht aus dieser Betrachtung leicht die Folgerung hervor, dass man auf jede Integration in endlicher Form keinen zu grossen Werth legen dürfe. Dies machen wir noch durch folgende Betrachtungen anschaulich:

Da Wurzeln und Logarithmen, weil es indirecte Verbindungen sind, im Allgemeinen irrational sind, d. h. in Form einer unendlichen Reihe bei der Ausrechnung sich darstellen, also nur in Ausnahmsfällen in endlicher Form existiren; so kann man sich nicht wundern, wenn dies auch mit dem Integrale der Fall ist, weil das Integriren ebenfalls eine indirecte Operation ist, dem Differenziren entgegengesetzt. — Es ist nun bereits angegeben, in wie wenigen Fällen das Integral $\int X dx$ in endlicher Form wirklich herzustellen ist. Darauf hält man eine totale Differentialgleichung zwischen zwei Veränderlichen bereits für integrirt in endlicher Form, wenn man für y eine Zusammensetzung aus x gefunden hat, in welcher selber noch ein solches angezeigtes Integral $\int X dx$ vorkommt, oder wohl schon, wenn man eine Gleichung zwischen x und y in endlicher Form gefunden hat, in welcher mehrere solche angezeigte Integrale $\int X dx$, $\int Y dy$, ... noch vorkommen; obgleich letztere nur aus-

nahmsweise in endlicher Form herzustellen sein werden. Sodann hält man wieder das Integriren der partiellen Differentialgleichungen für durchgeführt, sobald man sie auf totale Differentialgleichungen zurückgeführt sieht, deren Integration theoretisch nichts mehr im Wege liegt; obgleich das wirkliche Integriren derselben in endlicher Form wiederum nur ausnahmsweise wird durchgesetzt werden können. — Nimmt man noch dazu, dass die allgemeinen Integrale in endlicher Form, welche für die partiellen Differentialgleichungen hergestellt werden können, oft in einer Gestalt erscheinen, welche für die Brauchbarkeit dieser Resultate in den Anwendungen wenig Hoffnung übrig lässt, so wird man das Integriren in endlicher Form, in Bezug auf die Anwendungen wenigstens, für als nur in einfachen und seltenen besonderen Fällen wirklich durchführbar halten.

Um die Aufgaben, welche zu solchen Gleichungen führen, aufzulösen, muss man daher, namentlich in Mechanik und Physik, häufig zu ihren in Reihen dargestellten Integralen seine Zuflucht nehmen.

§. 113.

Integration der partiellen Differentialgleichungen durch unendliche Reihen.

Um Integrale in Form von unendlichen Reihen zu erhalten, wird man die Methode der unbestimmten Coefficienten und Exponenten mit dem besten Erfolge anwenden. — Es sei u eine Function einer beliebigen Anzahl unabhängiger Veränderlicher $x, y, z, t, \dots$, und diese Function soll einer gegebenen partiellen Differentialgleichung genügen, die wir durch $L = 0$ darstellen. Nun denke man sich, dass der Werth von u in einer, nach den Potenzen einer der Veränderlichen $x, y, z, t, \dots$, oder allgemeiner, einer anderen Grösse ϑ, welche irgend eine Function von einer oder mehreren dieser Veränderlichen ist, geordneten Reihe entwickelt sei. Man setzt daher

$$u = P\vartheta^{\alpha} + Q\vartheta^{\beta} + R\vartheta^{\gamma} + \dots,$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ P, Q, R, ... unbestimmte Coefficienten und Exponenten sind. Nun substituirt man diesen Werth von u nebst dessen Differentialquotienten in die Gleichung $L = 0$, ordnet sodann L nach Potenzen von ϑ (zu welchem Behufe zuweilen erst die unbestimmt gelassenen Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ zweckmässig angenommen werden müssen, jedoch so, dass $\alpha < \beta < \gamma < \dots$ wird) und setzt dann die

Coefficienten dieser Potenzen von ϑ alle einzeln gleich Null. Aus diesen einzelnen Gleichungen müssen dann $P, Q, R, \ldots \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ gefunden werden. Wenn die angenommene Form der Reihe (namentlich des ϑ) für das allgemeine Integral nicht passt (was der Fall ist, wenn Coefficienten unendlich werden), so suche man Reihen, die nach Potenzen von $(\vartheta - a)$ fortlaufen, wo a eine beliebige Constante ist (die man so wählt, dass das Unendliche in der Rechnung nicht vorkommt), welche Form der Entwickelung keiner denkbaren Function sich versagt. Dann ist, wenn man bei dieser Methode sowohl für die Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ als auch für die Coefficienten $P, Q, R, \ldots$ die allgemeinsten Bestimmungen sich verschafft, die so gefundene Reihe das allgemeine Integral der gegebenen partiellen Differentialgleichung, welches alle besonderen in sich schliesst.

§. 114.

Wahl des ϑ. Verschiedene Formen des Integrals.

Das ϑ kann irgend eine der unabhängig Variablen $x, y, \ldots$ selbst sein, während $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ gleich $0, 1, 2, \ldots$, so dass die Reihe für u nach ganzen Potenzen einer Veränderlichen fortschreitet. Allgemeiner nimmt man $\vartheta = x - a$, oder $\vartheta = y - b$.

Bei den Aufgaben der Mechanik und Physik ist es gewöhnlich am bequemsten, $\vartheta = e^x$, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen ist, anzunehmen, so dass man

(1) $$u = Pe^{\alpha x} + Qe^{\beta x} + Re^{\gamma x} + \ldots$$

setzt, wo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ constant, während $P, Q, R, \ldots$ Functionen der anderen Veränderlichen sind.

Dabei müssen die Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ aus den Nebenbedingungen der Aufgabe (also aus den für bestimmte Werthe der Veränderlichen vorhandenen Bedingungen) ihre Bestimmung erhalten. Sie zeigen sich zuweilen imaginär (z. B. wenn u eine periodische Function ist, weil eine solche durch Exponential-Ausdrücke mit reellen Exponenten nicht darstellbar ist), und in diesem Falle müssen die Exponentialgrössen im Integral, wenn bequeme Rechnungen stattfinden sollen, in Sinus und Cosinus verwandelt werden. Dadurch giebt man der Reihe (1) eine andere Form. Es seien nämlich $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ andere willkürliche Constanten, und $p, q, r, \ldots p', q', r' \ldots$ andere Unbekannte. Setzt man in der Reihe (1) $\pm \lambda\sqrt{-1}$, $\pm \mu\sqrt{-1}$, $\pm \nu\sqrt{-1}$, ... statt $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, ersetzt dann $P, Q, R, \ldots$ durch

$\frac{1}{2}$ p $\pm \frac{1}{2}$ p$'\sqrt{-1}$, $\frac{1}{2}$ q $\pm \frac{1}{2}$ q$'\sqrt{-1}$, $\frac{1}{2}$ r $\pm \frac{1}{2}$ r$'\sqrt{-1}$, . . . und nimmt alsdann die Summe der Werthe von u, welche den beiden Zeichen von $\sqrt{-1}$ entsprechen, so hat man

$$(2) \qquad u = \begin{cases} p \cos \lambda x + q \cos \mu x + r \cos \nu x + \ldots \\ + p' \sin \lambda x + q' \sin \mu x + r' \sin \nu x + \ldots \end{cases}$$

wo man $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ als constant, dagegen $p, p', q, q', r, r', \ldots$ als Functionen der übrigen Veränderlichen ansieht. Diese Form (2) für u wird man im betreffenden Falle lieber gleich vom Anfange an statt der Form (1) wählen.

Jenachdem man also die Grösse ϑ anders wählt, erhält man verschiedene in Reihen entwickelte Ausdrücke von u, welche alle, unter gleichgeltenden Formen, das allgemeine Integral von $L = 0$ sein werden, so dass, wenn man dieses Integral auch unter endlicher Form ausdrücken kann, jede dieser Reihen eine andere Entwickelung desselben sein wird und immer daraus abgeleitet werden kann. So entstehen verschiedene Formen desselben allgemeinen Integrals. Dabei kann die Anzahl der in der Reihe für das Integral u vorkommenden willkürlichen Functionen, obgleich die sie enthaltenden Coefficienten P, Q, R, ... auf die allgemeinste Weise bestimmt sind, sich ändern, jenachdem die Reihe nach den Potenzen dieser oder jener Veränderlichen ϑ geordnet sein wird. Diese Anzahl kann kleiner sein, als die Zahl, welche die Ordnung der gegebenen Gleichung bezeichnet (d. h. als die der höchsten partiellen Differentiale, welche sie enthält). Es kann sogar sich ereignen, dass alle willkürlichen Functionen aus der Reihe verschwinden, die alsdann nur eine unendliche Anzahl willkürlicher Constanten enthalten wird, ohne dass sie jedoch aufhört, das allgemeine Integral auszudrücken.

Die willkürlichen Grössen im Integral erhalten in den Anwendungen nach den verschiedenen Nebenbedingungen der einzelnen Aufgaben ihre verschiedene Bestimmung.

Sobald man, vermöge der andern Bedingungen der Aufgabe, die zur Differentialgleichung $L = 0$ geführt haben, alle willkürlichen Grössen, welche die Reihe für das Integral enthält, bestimmt haben wird, so muss sie, wenn sie brauchbar sein soll, convergiren. Divergirt sie aber für gewisse Werthe von ϑ, so muss man diese Grösse ändern, und die Reihe durch eine andere nach Potenzen einer anderen Veränderlichen geordnete Reihe ersetzen.

In allen den Fällen, wo algebraische oder transcendente geschlossene, endliche Formen des allgemeinen Integrals nicht existiren, kann das allgemeine Integral die verschiedensten Formen annehmen.

Daher ist oft sehr schwer zu erkennen, dass das gefundene Integral einer gegebenen partiellen Differentialgleichung das allgemeine sei, d. h. dasjenige, welches alle einzelnen, von einander verschiedenen Integrale, die es noch geben mag, in sich schliesst.

§. 115.

Zusammenhang der verschiedenen partiellen Differentialgleichungen unter sich und mit den totalen Differentialgleichungen.

Eine partielle Differentialgleichung zwischen drei Veränderlichen x, y und der Function u (nebst den Differentialquotienten $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, ...) ist einer unendlich grossen Anzahl von totalen Differentialgleichungen zwischen den beiden Veränderlichen y und u (nebst den Differentialquotienten $\frac{du}{dy}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$, $\frac{d^3u}{dy^3}$, ... von u nach y) gleichzuachten, welche alle aus ihr hervorgehen, wenn man sich in ihr nach und nach unendlich viele und alle Werthe gesetzt denkt, welche x nur immer haben kann. Jede dieser unendlich vielen totalen Gleichungen, wenn sie integrirt wird, liefert dann für dieses bestimmte x den zugehörigen Werth u in y ausgedrückt, während statt $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dydx}$, ..., weil sie ebenfalls Functionen von y und x sind, für jeden bestimmten Werth von x blos Functionen von y zu stehen kommen.

Auf dieselbe Weise ist eine partielle Differentialgleichung zwischen vier Veränderlichen x, y, z und der Function u, als ein Aggregat von einer unendlichen Anzahl von partiellen Differentialgleichungen mit den drei Veränderliehen y, z und u anzusehen, welche letztere aus ersterer dadurch hervorgehen, dass man statt x nach und nach alle seine stetig neben einander liegenden Werthe gesetzt denkt.

U. s. w. f.

§. 116.

Anwendungen in Geometrie.

Da durch partielle Differenzirung der Gleichungen nicht nur die constanten Grössen, sondern selbst noch ganz willkürliche Functionen zum Verschwinden gebracht werden können, so ist die partielle Diffe-

rentialgleichung viel allgemeiner als die Urgleichung, und um so mehr, je höher die Ordnung. Die Gleichung mit partiellen Differentialen umfasst unendlich viele Gleichungen. Daher ist man im Stande, mittelst der partiellen Differentiale, Familien, Ordnungen, Classen von Gleichungen darzustellen.

Die vielumfassende Bedeutung, deren die partiellen Differentialgleichungen fähig sind, zeigt sich für die Gleichungen mit 3 Veränderlichen in der Geometrie bei der Theorie der krummen Flächen. Eine partielle Differentialgleichung zwischen drei Veränderlichen drückt eine gemeinsame Eigenschaft aller Flächen aus, deren Gleichungen dem Integrale entsprechen, so dass die gegebene Differentialgleichung einer unendlichen Menge verschiedener Flächen angehört, die alle einen gemeinsamen Charakter haben, welcher durch diese Gleichung allgemein dargestellt wird, und sich geometrisch in der analogen Art ihrer Erzeugung ausspricht. Nämlich diejenigen Flächen, welche auf gleiche Weise entstehen, sind nothwendig durch eine gewisse gemeinschaftliche Eigenschaft ihrer Berührungsebenen charakterisirt; so dass, wenn diese Eigenschaft zufolge der allgemeinen Gleichung der Berührungsebene analytisch ausgedrückt wird, man eine Differentialgleichung erhält, welche sämmtliche Flächen dieser Familie darstellt.

Dadurch ist man in den Stand gesetzt, auf analytischem Wege die krummen Flächen in natürliche Familien einzutheilen, gemäss der Art ihrer Erzeugung, welche Eintheilung auch für die Einsicht der Operationen in den Künsten und Gewerben nützlich ist. Integrirt man die partiellen Differentialgleichungen der Flächen, so kommen in den endlichen Gleichungen willkürliche Functionen vor, und diesen entspricht das, was bei der Erzeugung der betrachteten Flächen unbestimmt ist, und erst durch die besondere Beschaffenheit der durch die Gleichung vorgestellten Fläche näher bestimmt wird (nämlich die Unbestimmtheit der Curven, durch welche die Fläche hindurch gehen soll).

Ist die partielle Differentialgleichung einer Flächenfamilie von der ersten Ordnung, so enthält die endliche Gleichung, welche das Integral derselben ist, eine willkürliche Function. Zum Beispiele dient die Familie der cylindrischen Flächen, die Familie der conischen, die der Rotations-Flächen.

Ist die partielle Differentialgleichung einer Flächenfamilie von der zweiten Ordnung, so enthält die endliche Gleichung zwei willkürliche Functionen, und diese grössere Unbestimmtheit charakterisirt eine noch allgemeinere Gruppe. Z. B. Die Ordnung der abwickel-

baren Flächen (surfaces développables), worunter die cylindrischen, conischen und unzählige andere Flächen begriffen sind.

Noch umfassender ist eine Gleichung mit partiellen Differentialen der dritten Ordnung, welcher eine endliche Gleichung mit drei willkürlichen Functionen entspricht, wodurch eine Classe von Flächen dargestellt werden kann. Z. B. Die Regelflächen (surfaces réglées), d. h. alle durch eine gerade Linie erzeugten Flächen, worunter sowohl die windschiefen (surfaces gauches), als die abwickelbaren Flächen begriffen sind.

Die endlichen Gleichungen der Flächenfamilien sind wegen der Unbestimmtheit der in ihnen enthaltenen willkürlichen Functionen weniger bequem zu analytischen Arbeiten, wobei ihnen die Gleichungen mit partiellen Differentialen vorzuziehen sind. Dies Verfahren hat wesentlich beigetragen, um die Theorie der krummen Flächen zu einem hohen Grade von Allgemeinheit zu vervollkommnen.

Bei den Anwendungen in Mechanik und Physik kommen auch partielle Differentialgleichungen mit 4 und 5 Veränderlichen vor.

§. 117.

Anwendungen in Mechanik und Physik.

In den wichtigsten Anwendungen der Mathematik auf Mechanik und Physik wird man zu partiellen Differentialgleichungen geführt.

Diese sind glücklicherweise in den meisten Aufgaben linear (d. h. die Differentialquotienten kommen nur auf der ersten Potenz vor), indem es bei der Auflösung der Probleme gestattet ist, die Producte und höheren Potenzen gewisser veränderlicher Grössen wegen ihrer Kleinheit zu vernachlässigen.

Die partiellen Differentialgleichungen haben den eigenthümlichen Charakter, dass ihnen immer durch eine unendliche Menge besonderer Auflösungen Genüge geleistet werden kann, welche in einer einzigen Formel enthalten sind. Die Gesammtheit dieser Auflösungen ist das allgemeine Integral, in welchem willkürliche Grössen vorkommen, die sodann gemäss den besonderen Bedingungen jeder Aufgabe zu bestimmen sind. So sind die Mathematiker mittelst der partiellen Differentialgleichungen im Stande, allgemeine Gesetze wichtiger Erscheinungen auszudrücken.

Die Aufgaben, welche durch die Integration partieller Differentialgleichungen aufgelöst sind, betreffen hauptsächlich die Mechanik und die Theorie der Bewegung der Wärme. — In den Aufgaben der Mechanik, wo man die Bewegung eines Systems von Körpern unter-

sucht, werden die veränderlichen Coordinaten der beweglichen Puncte als Functionen der Zeit und ihrer anfänglichen Coordinaten angesehen. Die Differentialgleichungen drücken die allgemeinen Gesetze der Bewegung aus. Die Integrale müssen diesen Gleichungen Genüge leisten, ferner den besonderen Bedingungen des Systems, und müssen, wenn man darin die Zeit gleich Null setzt, den Anfangszustand der Ruhe oder der Bewegung darstellen. — In der Theorie der Wärme betrachtet man die Temperatur in einem gegebenen Puncte eines Körpers als Function der Zeit und der drei Coordinaten dieses Punctes. Die Differentialgleichung drückt gewisse Relationen aus, welche zwischen den partiellen Differentialquotienten dieser Function stattfinden müssen, welche Relationen unmittelbar aus dem Gesetze der Mittheilung der Wärme hervorgehen und allen Fällen gemeinschaftlich sind. Das Integral muss diesen Relationen genügen, und ausserdem gewissen besonderen Bedingungen, welche von der Gestalt des Körpers, von der Art der Erwärmung oder Erkältung, und endlich vom Anfangszustande der Temperaturen in den verschiedenen Puncten abhängen.

IX. Zerlegung von Gleichungen, welche Differentiale und Integrale enthalten, in mehrere einzelne Gleichungen.

§. 118.

Gleichungen mit Differentialen.

Schon im §. 11 wurde von der Zerfällung einer Gleichung in mehrere geredet. Eine Fortsetzung davon enthalten die beiden folgenden Paragraphen.

I. Wenn in der Gleichung

$$A + A_0 y + A_1 \frac{dy}{dx} + A_2 \frac{d^2y}{dx^2} + \dots + A_n \frac{d^ny}{dx^n} = 0$$

y jede beliebige Function von x bedeutet, so sind die Coefficienten $A, A_0, A_1, A_2, \dots A_n$ alle einzeln der Null gleich.

Zum Beweise braucht man nur für y solche Functionen zu nehmen, dass die Differentialquotienten von irgend einer Ordnung an verschwinden.

Auch muss jeder einzelne Coefficient Null sein, sobald nur zur Bedingung gemacht wird, dass die gegebene Gleichung für eine Function von x mit mehr als n von einander unabhängigen willkürlichen Constanten gelten soll.

Nämlich zum Beweise braucht man nur eine solche Function mit $n+1$ Constanten zu nehmen, und dann die Constanten zweckgemäss zu wählen.

Hier, wie in den folgenden Sätzen, ist vorausgesetzt, dass die Coefficienten von y ganz unabhängig sind. Ist daher einmal gefunden, dass sie $=0$ sind, für irgend ein y, so sind sie immer $=0$, auch für jedes andere y. Uebrigens können die Coefficienten x enthalten.

II. Findet die Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} A + A_0 y_a + A_1 \frac{dy_a}{dx} + \ldots + A_m \frac{d^m y_a}{dx^m} \\ + B + B_0 y_b + B_1 \frac{dy_b}{dx} + \ldots + B_n \frac{d^n y_b}{dx^n} \\ + C + C_0 y_c + C_1 \frac{dy_c}{dx} + \ldots + C_p \frac{d^p y_c}{dx^p} \\ + \ldots\ldots \end{array}\right\} = 0$$

für jede beliebige Function y von x statt, so müssen die Coefficienten

$$A_0, A_1, A_2, \ldots A_m, B_0, B_1, B_2, \ldots B_n, C_0, C_1, C_2, \ldots C_p$$

jeder einzeln für sich der Null gleich sein, also dass auch

$$A + B + C = 0$$

ist. Hier bedeuten y_a, $\frac{dy_a}{dx}$, u. s. w. das, was aus y, $\frac{dy}{dx}$, u. s. w. wird, wenn darin a statt x gesetzt wird, u. s. w.

Beweis. Man nehme statt y eine Function von x mit wenigstens $m+n+p+4$ von einander unabhängigen Constanten, so lassen sich diese Constanten allemal anders und anders nehmen, und zugleich auch so, dass die $m+n+p+3$ Ausdrücke y_a, $\frac{dy_a}{dx}$, ... alle $=0$ werden, weshalb $A+B+C=0$ sein muss. Lässt man aber diese 3 Glieder aus der Gleichung weg, so kann man wiederum den willkürlichen Constanten solche Werthe beilegen, dass von den $m+n+p+3$ Ausdrücken y_a, $\frac{dy_a}{dx}$, ... alle bis auf einen einzigen der Null gleich werden, dieser einzige aber, welcher nicht Null wird, einen bestimmten Werth erhalte. Dann könnte die Gleichung nicht bestehen, wenn nicht der Coefficient des letztern $=0$ wäre. Und da dieser letztere jeder der gedachten Ausdrücke werden kann, so müssen alle Coefficienten einzeln der Null gleich sein.

III. Findet die Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} A + A_0 y + A_1 \frac{dy}{dx} + A_2 \frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + A_n \frac{d^n y}{dx^n} \\ + B_0 y_a + B_1 \frac{dy_a}{dx} + B_2 \frac{d^2 y_a}{dx^2} + \ldots + B_m \frac{d^m y_a}{dx^m} \\ + \ldots\ldots \end{array}\right\} = 0$$

für jede beliebige Function y von x statt, so müssen die Coefficienten $A, A_0, A_1, A_2, \ldots A_n, B_0, B_1, \ldots B_m$, jeder für sich, der Null gleich sein.

Beweis. Man setze statt y eine Function von x mit einer hinreichenden Anzahl willkürlicher Constanten, um durch schickliche Bestimmung der letztern für irgend einen bestimmten Werth α von x, alle Glieder der Gleichung bis auf eines verschwinden zu lassen; so könnte die Gleichung nicht bestehen, wenn nicht der Coefficient dieses letztern $=0$ wäre. Und da dieses letztere jedes der $m+n+3$ Glieder der Gleichung werden kann, so muss nothwendig auch jeder einzelne Coefficient der Null gleich sein.

IV. Ist gegeben die Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} A + A_0 y + A_1 \frac{dy}{dx} + A_2 \frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + A_m \frac{d^m y}{dx^m} \\ \quad + B_0 z + B_1 \frac{dz}{dx} + B_2 \frac{d^2z}{dx^2} + \ldots + B_n \frac{d^n z}{dx^n} \\ \quad + \ldots \end{array}\right\} = 0$$

oder die Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} A_0 y + A_1 \frac{dy}{dx} + A_2 \frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + A_m \frac{d^m y}{dx^m} \\ + B_0 z + B_1 \frac{dz}{dx} + B_2 \frac{d^2z}{dx^2} + \ldots + B_n \frac{d^n z}{dx^n} \\ + C_0 y_a + C_1 \frac{dy_a}{dx} + \ldots\ldots\ldots + C_p \frac{d^p y_a}{dx^p} \\ + D_0 z_b + C_1 \frac{dz_b}{dx} + \ldots\ldots\ldots + D_q \frac{d^q z_b}{dx^q} \\ + \ldots . \end{array}\right\} = 0$$

unter der Voraussetzung, dass solche stattfinden soll für jede beliebige Function y von x, und zugleich auch für jede beliebige, von der erstern unabhängige Function z von x; so müssen alle Coefficienten einzeln der Null gleich sein.

Der **Beweis** ist, den vorhergegangenen Beweisen analog, leicht zu führen.

V. Ist gegeben die Gleichung

$$\left.\begin{array}{r} A + A_0 u + A_1 \frac{du}{dx} + A_2 \frac{d^2u}{dx^2} + \ldots \\ + B_1 \frac{du}{dy} + B_2 \frac{d^2u}{dxdy} + \ldots \\ + C \frac{d^2u}{dy^2} + \ldots \end{array}\right\} = 0$$

für jede Function von x und y, welche statt u gesetzt werden mag, so sind alle Coefficienten einzeln der Null gleich.

Beweis wie bei den vorhergehenden ähnlichen Sätzen.

Man könnte leicht noch mehr analoge Sätze aufstellen.

§. 119.

Gleichungen mit Integralen.

I. Ist gegeben die Gleichung

$$\int_a^b uzdx = 0$$

wo u und z Functionen von x sind, für jede beliebige Function z, so ist auch

$$u = 0,$$

wenn nur b von a verschieden ist.

Beweis. Denn wäre u nicht $=0$, so könnte man $\frac{1}{u}$ statt z setzen, und man hätte dann

$$\int_a^b u \cdot \frac{1}{u} dx = b - a = 0,$$

welches ein Widerspruch ist, weil nach der Voraussetzung b von a verschieden sein soll.

II. Ist gegeben die Gleichung

$$\left.\begin{array}{r} \int_a^b uzdx + Pz_\alpha + P_1 \frac{dz_\alpha}{dx} + \ldots + P_n \frac{d^n z_\alpha}{dx^n} \\ + Q.z_\beta + Q_1 \frac{dz_\beta}{dx} + \ldots + Q_n \frac{d^n z_\beta}{dx^n} \end{array}\right\} = 0$$

für jede Function z von x; so ist erstlich

$$u = 0$$

welches u eine Function von x bedeutet, und ausserdem sind noch die Ausdrücke

$$P, Q, P_1, Q_1, \ldots P_n, Q_n$$

jeder für sich der Null gleich.

Beweis. Man zeige zuerst, dass die letztern Coefficienten $=0$ sind auf folgende Art: Setzt man in der gegebenen Gleichung statt z eine Function von x mit $2n+3$ willkürlichen und von einander unabhängigen Constanten, so kann man eine dieser Constanten so bestimmen, dass

$$\int_a^b uzdx = 0$$

wird, und die übrigen Constanten können nach und nach solche verschiedene Werthe annehmen, dass immer von den Ausdrücken

$$z_\alpha, z_\beta, \frac{dz_\alpha}{dx}, \frac{dz_\beta}{dx}, \text{ u. s. w.}$$

alle bis auf einen einzigen der Null gleich werden, dieser einzige aber einen andern bestimmten Werth erhält, so dass die Gleichung nun nicht bestehen

könnte, wenn nicht der Coefficient dieses Gliedes $=0$ wäre. Also könnte die gegebene Gleichung für jede Function z von x nicht bestehen, wenn nicht die Coefficienten

$$P, Q, P_1, Q_1, \ldots$$

alle, jeder für sich, der Null gleich wären. Es muss dann auch noch

$$u=0$$

sein.

III. Ist

$$\left.\begin{aligned}&\int_a^b uy\,dx + \int_a^b vz\,dx\\ &+P\cdot y_\alpha + P_1\frac{dy_\alpha}{dx}+\ldots\\ &+Q\cdot y_\beta + Q_1\frac{dy_\beta}{dx}+\ldots\\ &+R.z_\alpha + R_1\frac{dz_\alpha}{dx}+\ldots\\ &+S.z_\beta + S_1\frac{dz_\beta}{dx}+\ldots\end{aligned}\right\} = 0$$

für jede beliebige Function von x, welche statt y, und für jede von der ersteren unabhängige Function von x, welche statt z gesetzt werden mag, so muss

$$u=0 \text{ und } v=0$$

sein, wo u und v Functionen von x vorstellen, und auch alle Coefficienten

$$P, Q, P_1, \ldots, R, R_1, \ldots$$

müssen dann einzeln der Null gleich sein.

Beweis. Man setze statt z eine solche Function von x, für welche in der gegebenen Gleichung Alles herausfällt, was von z abhängig ist, so reducirt sich diese Gleichung (III.) auf (II.), und man hat also $u=0$ und alle Coefficienten der von z abhängigen Glieder sind nothwendig $=0$. Gerade so kann man aber auch verfahren, um den übrigen Theil der Behauptung ausser Zweifel zu setzen, also namentlich auch, dass $v=0$ ist.

Man könnte leicht noch ähnliche Sätze aufstellen.

X. Rückblick auf die Integralrechnung.

§. 120.

Theile der Integralrechnung.

Die Integralrechnung zerfällt in die Integration der entwickelten und der unentwickelten Differentiale, oder der Differential-

formeln und Differentialgleichungen. Die Unterscheidung dieser beiden Fälle ist hier noch wichtiger und wesentlicher, als die entsprechende in der Differentialrechnung. Nämlich beim Differenziren, wie wir sahen, beruht diese Unterscheidung nur auf der Schwierigkeit, jede Gleichung aufzulösen. Aber wenn auch diese Schwierigkeit gehoben wäre, so würden dennoch die Differentialgleichungen einen ganz andern Fall der Integration darbieten, als die entwickelten Differentiale. Denn z. B. im einfachsten Falle sei y eine Function von x, und man habe eine Differentialgleichung zwischen x, y und $\frac{dy}{dx}$; wäre nun diese nach $\frac{dy}{dx}$ aufgelöst, so würde auf der andern Seite noch y vorkommen, und es wäre für die Integration nichts gewonnen, ausser in dem sehr speciellen Falle, wo die Differentialgleichung das y selbst nicht enthielte. Demnach ist die Integration der Differentialgleichungen nothwendig schwieriger, als die der entwickelten Differentiale, womit der Integral-Calcul beginnt. Die verschiedenen bis jetzt vorgeschlagenen Verfahren zur Integrirung der Differentialgleichungen, z. B. die Absonderung der Variablen, die Methode der Multiplicatoren u. s. w. haben zum Zwecke, diese Integrationen auf die der Differentialformeln zurückzubringen. Während diese nothwendige Grundlage der ganzen Integralrechnung bis jetzt leider noch unvollkommen ist, hat die Kunst, darauf die Integration der Differentialgleichungen zurückzuführen, noch weit weniger Fortschritte gemacht.

Jeder der genannten beiden Hauptzweige der Integralrechnung hat wieder, wie in der Differentialrechnung, zwei Unterabtheilungen, indem man Functionen von e i n e r, oder von m e h r e r e n unabhängigen Variablen betrachten kann. Diese Unterscheidung ist, wie die vorhergehende, noch viel wichtiger für die Integration als für die Differenzirung, und zeigt sich besonders merkwürdig bei den Differentialgleichungen. Nämlich Gleichungen mit mehreren unabhängig Variablen können die eigenthümliche und grössere Schwierigkeit zeigen, dass die gesuchte Function durch eine Relation zwischen ihren p a r t i e l l e n Differentialen bestimmt ist. Daraus entpringt der schwerste und ausgedehnteste Theil der Integralrechnung, der Integral-Calcul mit partiellen Differentialen, welches ein neuer eigenthümlicher Zweig ist. Ein sehr auffallender Unterschied zwischen einer Gleichung mit einer einzigen unabhängig Variablen, und einer partiellen Differentialgleichung besteht in den willkürlichen Functionen, welche hier an die

Stelle der einfachen willkürlichen Constanten treten müssen, um den Integralen volle Allgemeinheit zu geben.

Eine andere allgemeine Unterabtheilung beim Integriren der entwickelten oder unentwickelten Differentiale mit einer oder mehreren Variablen, gründet sich auf die mehr oder weniger hohe Ordnung der Differenzirungen, welcher Umstand in der Differentialrechnung bekanntlich keine Schwierigkeiten macht, dagegen in der Integralrechnung neue Verwickelungen bringt. Bei den unentwickelten Differentialen ist die Unterscheidung der Ordnungen noch wichtiger, indem die höhere Ordnung der Differentialgleichungen zu neuen Aufgaben Veranlassung giebt. Nicht jede Differentialgleichung einer höheren Ordnung lässt sich auf die der nächst niederen Ordnung zurückführen. Eine totale Differentialgleichung höherer Ordnung hat zwar immer ein erstes Integral u. s. w., aber von einer partiellen Differentialgleichung höherer Ordnung existirt ausser der Urgleichung nicht immer ein niedrigeres Integral. Im Allgemeinen bieten die Differentialgleichungen um so verwickeltere Fälle dar, als ihre Ordnung höher ist, und lassen sich in günstigen Fällen nur durch specielle Methoden auf niedrigere Ordnungen zurückführen.

Endlich ist noch einer allgemeinen Unterscheidung zu erwähnen, indem man entweder nur Eine Function aus Einer Differentialgleichung zu bestimmen hat, oder in einem offenbar viel verwickelteren Falle hat man gleichzeitig mehrere Functionen mittelst mehrerer Differentialgleichungen zu bestimmen.

Die Integration entwickelter Differentialformeln lässt sich, wenn sie die Bedingungen der Integrabilität erfüllen, immer auf Quadraturen zurückführen. Was aber die Integration der Differentialgleichungen (in endlicher Form) betrifft, so gelingt es nur in günstigeren Fällen, die totalen Differentialgleichungen zu integriren, und die Integration der partiellen Differentialgleichungen auf die von totalen zurückzuführen, wobei allgemeinere Methoden bis jetzt nur in einfacheren Fällen, z. B. bei linearen und bei Gleichungen der ersten Ordnung sich angeben lassen.

§. 121.

Grundlage und Ziel des Integrirens.

Wir haben gesehen, dass die Integration der entwickelten Differentialformeln der ersten Ordnung mit einer einzigen Variablen die nothwendige Basis aller anderen Integrationen ist, die nur insofern

auszuführen sind, als sie sich auf jenen einfachsten Fall zurückführen lassen, welcher allein einer directen Behandlung fähig ist. Diese einfache und fundamentale Integration wird oft durch den bequemen Namen der **Quadratur** bezeichnet, weil jedes Integral dieser Art $\int f(x)\,dx$ die Fläche einer Curve vorstellt, deren Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten $y = f(x)$ ist. Diese Classe von Aufgaben entspricht in der Differentialrechnung dem fundamentalen Falle der Differenzirung der entwickelten Functionen einer einzigen Variablen. Jedoch ist die Aufgabe des Integrirens, ihrer Natur nach, viel verwickelter und ausgedehnter, als die des Differenzirens. Die Differenzirung reducirt sich auf die der einfachen Functionen. Aber keineswegs lässt sich die Integration der zusammengesetzteren Functionen nothwendig aus der Integration der einfachen Functionen ableiten, sondern jede neue Combination aus den einfachen Functionen bietet für die Integrirung neue Schwierigkeiten dar. Daher kommt es, dass die Aufgabe der Quadraturen, gemäss der Natur der Sache, einen unerschöpflichen Umfang hat, und keiner vollständigen Lösung sich erfreut. Was die Integration in endlicher oder geschlossener Form betrifft, so gehen die verschiedenen Methoden bei Bestimmung der Quadraturen nicht aus einem allgemeinen Principe hervor, sondern bestehen meist in isolirten zahlreichen Kunstgriffen des Calculs. Am meisten trägt noch einen allgemeineren Charakter das theilweise Integriren, wodurch man jedes Integral auf ein anderes zurückführen kann, welches letztere zuweilen leichter zu erhalten ist.

Vom Probleme der Quadraturen ist Folgendes zu sagen: Die Integration der transcendenten Functionen kann bis jetzt nur in wenigen einfacheren Fällen geleistet werden. Die Integration der algebraischen Functionen ist mehr ausgebildet, doch kann man die irrationalen Functionen nur in sehr wenig Fällen integriren, hauptsächlich durch Rationalmachen. Nur allein die Integration der rationalen Functionen lässt sich immer ausführen.

Die Bestimmung der Quadraturen gründet sich zuletzt auf die durch Inversion der fundamentalen Differentialformeln (für die einfachen Functionen) direct erhaltenen Integralformeln. Nämlich unmittelbar können wir nur diejenigen Differentialausdrücke integriren, welche durch die Differenzirung der einfachen Functionen entstanden sind. Hiernach besteht die Kunst des Integrirens eigentlich darin, andere Fälle so viel als möglich zuletzt auf diese kleine Anzahl fundamentaler Quadraturen zurückzuführen. Für solche Kunstgriffe lassen sich keine allgemeine Regeln aufstellen, sondern Uebung und Gewandtheit müssen hierbei das Meiste thun.

Man sieht, dass, während die Differentialrechnung, ihrer Natur nach, ein abgeschlossenes und vollkommenes System ist, dagegen die Integralrechnung ein unerschöpfliches Feld der Thätigkeit darbietet, noch abgesehen von den unzähligen Anwendungen.

Obgleich demnach der Integral-Calcul noch viel zu wünschen übrig lässt, indem er bis jetzt nur als eine Sammlung von Regeln und Kunstgriffen erscheint; so wussten doch die Mathematiker mittelst der bisherigen auf diesem Gebiete erworbenen Kenntnisse eine Menge der wichtigsten Aufgaben in Geometrie, Mechanik und Physik zu lösen. Dies kommt daher, weil eine abstracte Wahrheit eine Menge concreter Fälle begreift.

XI. Fernere Betrachtungen über Nutzen und Nothwendigkeit der Infinitesimalrechnung.

§. 122.

Nutzen der Differential- und Integralrechnung.

Der Infinitesimal-Calcul tritt in Anwendung beim Stetigen. Nämlich alle diejenigen Aufgaben der Mathematik, bei welchen es darauf ankommt, stetig veränderliche Grössen in Rechnung zu bringen, fallen in das Gebiet der Differential- und Integralrechnung, erfordern also nothwendig die Anwendung der höheren Analysis. Da nun überall stetige Grössen vorkommen, so ist das Feld der Anwendung unbeschränkt.

Die Infinitesimalrechnung gewährt bei der Anwendung eine bewundernswerthe Erleichterung für die Auffindung der in Geometrie, Mechanik, u. s. w. vorkommenden Relationen zwischen veränderlichen Grössen, weil sie, die Differentiale der Grössen in die Rechnung einführend, alle Functionen in ihren kleinsten Veränderungen als elementare betrachtet.

In den meisten Fällen lassen sich die gesuchten Gleichungen zwischen stetig veränderlichen Grössen (in Geometrie, Mechanik u. s. w.) nicht unmittelbar finden. Dann leistet die höhere Analysis höchst wichtige und unentbehrliche Dienste bei der Anwendung. Nämlich man bildet direct aus der Natur des Gegenstandes auf elementarem Wege, was gewöhnlich leicht geschieht, die Gleichung zwischen den kleinsten Aenderungen (oder Differentialen) der Grössen (indem man diese als elementare Functionen betrachtet); woraus sodann die Integralrechnung die gesuchte Gleichung zwischen den endlichen Grössen

selbst herstellt. So werden mit Hülfe des Infinitesimal-Calculs die gesuchten Gleichungen, welche man nicht direct bilden kann, auf indirectem Wege gefunden.

Dieses indirecte Verfahren kann verschiedene Grade haben. Nämlich es kann zuweilen zu schwierig sein, unmittelbar die Gleichung zwischen den ersten Differentialen der betrachteten Grössen zu bilden, und in diesem Falle sucht man direct die Relation zwischen den zweiten Differentialen der der Aufgabe zum Grunde liegenden Grössen.

Die Gleichungen zwischen den Differentialen der in Geometrie, Mechanik u. s. w. betrachteten Grössen sind viel einfacher und leichter zu entdecken, als die Gleichungen zwischen den Grössen selbst, aus dem Grunde, weil die veränderlichen Grössen in ihren Differentialen mit den elementaren Functionen zusammenfallen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, weil die höhern Differentiale neben den niedern verschwinden. Wir erinnern hier an den Ausspruch im §. 54, dass alle ungleichförmige Veränderung in ihren Differentialverhältnissen gleichförmig wird.

Daraus wird klar, welch mächtiges Werkzeug die Analysis des Unendlichen darbietet, in welcher die Wissenschaft eine der erhabensten Ideen entwickelt hat.

Die Erfindung der höhern Analysis setzte die Mathematiker in den Stand, die Dynamik (Bewegungslehre) analytisch auszubilden, eine neue Wissenschaft, welche den Alten ganz unbekannt war.

§. 123.

Ueber die Beziehung der Integralrechnung zur Differential-Rechnung.

Darüber bemerken wir noch Folgendes:

Das Verhältniss zwischen den unendlich kleinen Veränderungen zusammengehöriger Grössen ist die Ursache (der Grund) des Verhältnisses, welches sich zwischen den Veränderungen derselben Grössen herausstellt, wenn sie endliche Werthe erlangt haben.

Z. B. Die von einem frei fallenden Körper durchlaufenen Räume ändern sich den Quadraten der seit dem Beginnen des Falles verflossenen Zeiten proportional, weil der unendlich kleine Zuwachs des Raumes der erlangten Geschwindigkeit proportional ist, welche selbst der seit dem Beginnen der Bewegung verflossenen Zeit proportional ist. Diese so einfache Relation $ds = gtdt$ zwischen den Elementen der verflossenen Zeit und denen des beschriebenen Raumes ist der Grund oder die Ursache des weniger einfachen Gesetzes $s = \frac{1}{2}gt^2$,

welches zwischen den endlichen Veränderungen dieser beiden Grössen stattfindet. — Wenn ein Körper sich abkühlt, so ist sein Temperaturverlust in irgend einer Zeit eine zusammengesetzte Erscheinung, die ihren Grund in dem Gesetze hat, wonach der Körper fortwährend in jedem unendlich kleinen Zeittheilchen eine unendlich kleine Quantität Wärme ausstrahlt.

Vergleicht man daher alle diejenigen Untersuchungen mit einander, welche die Integralrechnung oder die Differentialrechnung erfordern, so wird man finden, dass die Integration da nöthig wird, wo von der Ursache zur Wirkung übergegangen werden soll, die Differentialrechnung hingegen, wo man aus der vorhandenen Wirkung die Ursache ableitet; statt Ursache und Wirkung könnte man auch sagen: erzeugende Grösse und erzeugte.

Z. B. Die Natur einer Curve entspringt aus dem Gesetze der Richtungsänderungen. Ist nun dies Gesetz gegeben, das ist die Relation zwischen dx und dy, so findet man daraus durch Integriren die erzeugte Curve, das ist die Relation zwischen x und y selbst. Umgekehrt aus der Gleichung einer gegebenen Curve findet man durch Differenziren das ihrer Entstehung zum Grunde liegende Gesetz der Richtungsänderungen. — Will man die Anziehung berechnen, welche eine materielle Curve auf einen Punct ausübt unter Annahme eines bestimmten Anziehungsgesetzes, so muss man die Anziehungen der einzelnen Elemente durch Integration vereinigen; will man dagegen etwa aus der Bahn, welche ein Körper um einen andern feststehenden beschreibt, das Anziehungsgesetz der Centralkraft ableiten, so macht sich eine Differenzirung nöthig.

Variationsrechnung.

§. 124.

Uebergang zur Variationsrechnung.

Bereits im §. 3 ist bemerkt, dass das System der Mathematik ein stufenweiser Verallgemeinerungsprocess ist.

Dieser Ansicht entspricht auch der historische Entwickelungsgang der Mathematik, ebenso wie auch in der Geschichte der physischen Wissenschaften jeder Epoche machende Fortschritt durch Generalisation geschieht, indem man vom Besonderen allmählig zum Allgemeineren aufsteigt.

Die erste Hauptstufe der Verallgemeinerung beginnt mit der Analysis, welche die einzelnen Grössen unter dem allgemeineren Begriffe der veränderlichen Grösse (Function) zusammenfasst. Eine zweite höhere Hauptstufe der Abstraction tritt dadurch ein, dass man verschiedene Functionen zusammenbegreift, indem man eine in die andere sich verwandeln lässt, und dies geschieht in der Variationsrechnung.

§. 125.

Grundbegriffe der Variationsrechnung.

Bisher änderte sich nur der Werth einer Function, während ihre Form d. i. die Relation (Verbindung) zwischen den Variablen dieselbe blieb; jetzt wird diese Form selbst als veränderlich angesehen, so dass eine Function in eine andere übergeht, die Function variirt. Dieser Theil der Analysis, welcher mit der Verwandlung der Functionen zu thun hat, heisst die Variationsrechnung, und beruht auf der höchsten Abstraction.

Die Werth-Veränderungen der Functionen betrachtet die Differential- und Integralrechnung; die Form-Veränderungen der Functionen betrachtet die Variationsrechnung.

Wir betrachten eine Function V einer oder mehrerer veränderlichen Grössen. Nun verwandle sich die Art und Weise, wie V von den Veränderlichen abhängt, d. h. die Form der Function V, indem sie in V_x übergeht. Dann wird V deshalb eine Aenderung erleiden, deren Betrag $V_x - V$ ist, und bei der unendlichen Annäherung der Function V_x an V unendlich klein wird. Man nennt eine solche durch die Formverwandlung einer Function erzeugte Aenderung derselben ihre Variation, und wenn dieselbe unendlich klein ist, eine Variation im engeren Sinne.

Um aber die an sich völlig willkürlichen (unendlich mannigfaltigen) Formverwandlungen und die daraus entspringenden Aenderungen der Functionen einer Rechnung unterwerfen zu können, ist es nöthig, aus den verwandelten Functionen ihren primitiven Zustand erkennen, und auf diesen zurückgehen zu können, indem sonst, wegen der übrigens völligen Willkürlichkeit der Formverwandlung, zwischen ihnen und den primitiven Functionen gar kein weiterer Zusammenhang stattfinden würde. Zu diesem Zwecke denke man sich mit jeder an der ursprünglichen Function V vorgenommenen Verwandlung zugleich eine beliebige unbestimmte Grösse x (die Variirende) verbunden oder in die Rechnung eingeführt, und unterwerfe die durch Verwandlung hervorgegangene Function V_x, bei übrigens völliger Willkürlichkeit des Zusammenhanges der Variablen und der Grösse x, nur der einzigen Bedingung, dass sie für $x=0$ wieder in den primitiven Zustand V zurückkehrt. Man sagt, V ist (durch x) variirt.

So kann man die Formänderung der Function als herrührend von der Veränderung des Werthes einer in der Function vorkommenden Grösse x betrachten.

Nun kann sogleich V_x, und $V_x - V$ immer in eine nach den positiven ganzen Potenzen der Variirenden x fortschreitende Reihe entwickelt werden. Nämlich denkt man sich x als veränderlich, und bezeichnet die Werthe der Differentialquotienten

$$\frac{dV_x}{dx},\ \frac{d^2V_x}{dx^2},\ \frac{d^3V_x}{dx^3},\ldots$$

für $x=0$ durch

$$\delta V,\ \delta^2 V,\ \delta^3 V,\ldots,$$

so ist nach der Maclaurinschen Reihe:

$$V_x - V = \delta V\,\frac{x}{1} + \delta^2 V\,\frac{x^2}{1.2} + \delta^3 V\,\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

Hier heissen δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$,... der erste, zweite, dritte,... Variationsquotient von V; Manche nennen sie auch schlechthin erste, zweite, dritte,... Variation von V. Für ein unendlich kleines

$\varkappa$ nimmt auch $V_\varkappa - V$ unendlich ab. Diese Variationsquotienten werden gefunden, wenn man, in Bezug auf $\varkappa$ als variabel, die successiven Differentialquotienten von $V_\varkappa$ entwickelt, und nach der Differenzirung $\varkappa = 0$ setzt, das wäre:

$$\delta^n V = \frac{d^n V_{\varkappa}}{d\varkappa^n}\Big|_0 .$$

Dabei erhellet, dass, wenn diese Rechnung wirklich ausführbar sein soll, die Function $V_\varkappa$ selbst gegeben sein muss, so dass also dieselbe nur bei bestimmten Formen der Function $V_\varkappa$ anwendbar sein würde. Auf der andern Seite aber erfordern alle Anwendungen der Variationsrechnung, und die dadurch bedingte nöthige Allgemeinheit unmittelbar, dass die Form der Function $V_\varkappa$ als völlig unbestimmt und willkürlich gedacht werde, nur immer mit der einzigen Bedingung, dass $V_\varkappa = V$ für $\varkappa = 0$. So schiene in der That unsere Untersuchung hier zu Ende zu sein, wenn die Sache nicht noch einer andern modificirten, sehr fruchtbaren, Ansicht fähig wäre.

Ist nämlich

$$V = f(x, y, z, \ldots)$$

irgend eine Function der Variablen x, y, z, ...; so kann man sich eine jede Veränderung (im obigen Sinne) derselben herbeigeführt denken, wenn für x, y, z, ... die völlig unbestimmten Functionen $\varphi(x, \varkappa) = x_\varkappa$, $\varphi'(y, \varkappa) = y_\varkappa$, $\varphi''(z, \varkappa) = z_\varkappa, \ldots$, die für $\varkappa = 0$ alle wieder in ihre primitiven Zustände x, y, z, ... übergehen, gesetzt werden, wodurch man hat

$$V_\varkappa = f(x_\varkappa, y_\varkappa, z_\varkappa, \ldots)$$

welches, wegen vorhergehender Bedingung in Bezug auf $x_\varkappa, y_\varkappa, z_\varkappa, \ldots$, $= V$ für $\varkappa = 0$. In der völligen Unbestimmtheit der für x, y, z, ... gesetzten Functionen erscheint die Annahme, dass durch deren Substitution für x, y, z, ... jede willkürliche Veränderung von V hervorgebracht werden könne, hinlänglich gerechtfertigt. Da nun aber

$$x_\varkappa = x + \delta x \frac{\varkappa}{1} + \delta^2 x \frac{\varkappa^2}{1.2} + \delta^3 x \frac{\varkappa^3}{1.2.3} + \cdots$$

$$y_\varkappa = y + \delta y \frac{\varkappa}{1} + \delta^2 y \frac{\varkappa^2}{1.2} + \delta^3 y \frac{\varkappa^3}{1.2.3} + \cdots$$

$$z_\varkappa = z + \delta z \frac{\varkappa}{1} + \delta^2 z \frac{\varkappa^2}{1.2} + \delta^3 z \frac{\varkappa^3}{1.2.3} + \cdots$$

u. s. f.

so erhält man $V_\varkappa$, wenn diese Reihen für x, y, z, ... in V gesetzt werden, und dann das Resultat nach Potenzen von $\varkappa$ entwickelt wird, das ist

$$V_\varkappa = V + \delta V \frac{\varkappa}{1} + \delta^2 V \frac{\varkappa^2}{1.2} + \delta^3 V \frac{\varkappa^3}{1.2.3} + \ldots,$$

wo nun, wie vorher, die Coefficienten von $\frac{\varkappa}{1}, \frac{\varkappa^2}{1.2}, \frac{\varkappa^3}{1.2.3}, \ldots$ die erste, zweite, dritte, vierte, u. s. f. Variation von V genannt werden. Ebenso heissen $\delta x, \delta y, \delta z, \ldots, \delta^2 x, \delta^2 y, \delta^2 z, \ldots$ die ersten, zweiten,... Variationen von $x, y, z, \ldots$ Alle diese Functionen müssen aber wegen der völligen Unbestimmtheit der Functionen $x_\varkappa, y_\varkappa, z_\varkappa, \ldots$ als ganz willkürliche Functionen respective von $x, y, z, \ldots$ gedacht werden.

Durch diese Ansicht der Sache wird erst eine wirkliche Rechnung möglich. Müssen nämlich auch die Variationen der Variablen immer noch als völlig unbestimmte Functionen derselben gedacht werden; so ist doch nun eben von diesen Variationen die Variation der Function V abhängig gemacht, und muss sich also durch dieselben darstellen lassen. Darin besteht denn auch das Geschäft der Variationsrechnung, als einer eigenthümlichen Rechnungsart, nämlich die Variation der Function V durch die unbestimmten Variationen ihrer veränderlichen Grössen (entwickelt) auszudrücken.

Es kann die betrachtete Variation der Function auch so beschaffen sein, dass dabei nicht alle Veränderlichen variiren; z. B. es bleibt dabei x ausser Betracht (es erfährt x keine Variation), dann ist $\delta x = 0$ zu setzen, auch $\delta^2 x = 0$, $\delta^3 x = 0, \ldots$

Uebrigens lässt sich die Einführung der Grösse $\varkappa$ in der Anwendung auch veranschaulichen, sowohl auf dem Gebiete der Geometrie, als dem der Mechanik. — In der Geometrie lasse man z. B. eine ebene Curve mit den Coordinaten x, y variiren. Dabei wird die Einführung der Grösse $\varkappa$ anschaulich, wenn man statt der betrachteten Linie eine krumme Fläche sich vorstellt, in welcher die Linie liegt. Die Grösse $\varkappa$ ist dann die dritte der Coordinaten. Jeder mit der Ebene x, y parallele Schnitt giebt eine andere Curve, so dass vermittelst der Grösse $\varkappa$ unzählige beliebige Curven vorgestellt werden können. — Auch lässt sich das $\varkappa$ durch Bewegung veranschaulichen. Nämlich wir betrachten ein System von Puncten. Die Lage jedes Punctes ist von seinen Coordinaten abhängig. Denkt man sich nun das System in Bewegung, so wird auch noch die Zeit $\varkappa$ implicirt, kommt noch hinzu gleichsam als vierte Coordinate.

§. 126.

Bestimmung des ersten und zweiten Variationsquotienten.

Als Beispiele zum Vorhergehenden entwickeln wir den ersten und zweiten Variationsquotienten δV, $\delta^2 V$ für die am häufigsten vorkommenden Fälle. Von den höhern Variationen findet höchstens noch die zweite eine Anwendung.

I. Es sei V eine Function von x. Variirt nun x, so variirt auch V, das heisst: wird statt x die Reihe $x_\varkappa$ gesetzt, so geht auch V in eine solche Reihe $V_\varkappa$ über. Dann findet sich sogleich nach §. 33

$$\delta V = \frac{dV}{dx}\delta x$$

$$\delta^2 V = \frac{d^2V}{dx^2}\delta x^2 + \frac{dV}{dx}\delta^2 x$$

Nämlich $\frac{dV_\varkappa}{d\varkappa} = \frac{dV_\varkappa}{dx_\varkappa} \cdot \frac{dx_\varkappa}{d\varkappa}$, und für $\varkappa = 0$, $\delta V = \frac{dV}{dx} \cdot \delta x$. Um $\delta^2 V$ zu erhalten, hat man in $\frac{d^2V_\varkappa}{d\varkappa^2}$ zuletzt $\varkappa = 0$ zu setzen.

II. Es sei V eine Function von x und y. Variirt nun x und y, so variirt auch V, das heisst: werden statt x und y die Reihen $x_\varkappa$ und $y_\varkappa$ gesetzt, so geht auch V in eine solche Reihe $V_\varkappa$ über. Dann ist

$$\delta V = \frac{dV}{dx}\delta x + \frac{dV}{dy}\delta y.$$

$$\delta^2 V = \frac{d^2V}{dx^2}\delta x^2 + 2\frac{d^2V}{dxdy}\delta x\delta y + \frac{d^2V}{dy^2}\delta y^2 + \frac{dV}{dx}\delta^2 x + \frac{dV}{dy}\delta^2 y$$

Hier ist nämlich $\frac{dV}{d\varkappa} = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{d\varkappa} + \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{d\varkappa}$, daher, wenn man $\varkappa = 0$ setzt die angeführte Formel für δV erhalten wird. Aehnlich bekommt man $\delta^2 V$.

III. Ist V eine Function von x, y, z, und werden statt x, y, z die Reihen $x_\varkappa$, $y_\varkappa$, $z_\varkappa$ gesetzt, so geht auch V in eine solche Reihe $V_\varkappa$ über, und die zwei ersten Variationsquotienten dieser Reihe sind hier:

$$\delta V = \frac{dV}{dx}\delta x + \frac{dV}{dy}\delta y + \frac{dV}{dz}\delta z;$$

$$\begin{aligned}\delta^2 V = {} & \frac{d^2V}{dx^2}\delta x^2 + \frac{d^2V}{dy^2}\delta y^2 + \frac{d^2V}{dz^2}\delta z^2 \\ & + 2\frac{d^2V}{dxdy}\delta x\delta y + 2\frac{d^2V}{dxdz}\delta x\delta z + 2\frac{d^2V}{dydz}\delta y\delta z \\ & + \frac{dV}{dx}\delta^2 x + \frac{dV}{dy}\delta^2 y + \frac{dV}{dz}\delta^2 z.\end{aligned}$$

IV. Ist $V=\frac{d^n y}{dx^n}$, und wird nun statt y eine Reihe $y_\varkappa$ gesetzt, so geht auch V in eine Reihe $V_\varkappa$ über, und die Variationsquotienten dieser Reihe sind:

$$\delta\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)=\frac{d^n\delta y}{dx^n};\quad \delta^2\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)=\frac{d^n\delta^2 y}{dx^n};\ \ldots$$

Z. B. Ist $V=\frac{dy}{dx}$, und man variirt durch $\varkappa$, so folgt

$$\frac{dV}{d\varkappa}=\frac{d\frac{dy}{d\varkappa}}{dx}=\frac{d\frac{dy}{d\varkappa}}{dx};$$

also, Null für $\varkappa$ gesetzt, erhält man $\delta V=\frac{d\delta y}{dx}$, das ist $\delta\frac{dy}{dx}=\frac{d\delta y}{dx}$.

V. Ist $V=\frac{d^{m+n}z}{dx^m dy^n}$, und wird nun statt z die Reihe $z_\varkappa$ gesetzt, so geht auch V in eine Reihe $V_\varkappa$ über, deren Variationsquotienten durch folgende Gleichungen bestimmt sind:

$$\delta\left(\frac{d^{m+n}z}{dx^m dy^n}\right)=\frac{d^{m+n}\delta z}{dx^m dy^n};\quad \delta^2\left(\frac{d^{m+n}z}{dx^m dy^n}\right)=\frac{d^{m+n}\delta^2 z}{dx^m dy^n};\ \ldots$$

VI. Ist $V=\int y\,dx$, wo y eine Function von x, und wird nun statt y die Reihe $y_\varkappa$ gesetzt, so geht auch V in eine solche Reihe $V_\varkappa$ über, deren Variationsquotienten durch die Gleichungen

$$\delta\int y\,dx=\int(\delta y)\,dx;\quad \delta^2\int y\,dx=\int(\delta^2 y)\,dx;\ \ldots$$

bestimmt sind, wenn nur die Integrale jedesmal zwischen denselben, von $\varkappa$ unabhängigen, Grenzen genommen sind.

Nämlich ist $V=\int y\,dx$, also $\frac{dV}{dx}=y$, so hat man, wenn zuvor mit $\varkappa$ variirt wird, $\frac{d\frac{dV}{dx}}{d\varkappa}=\frac{dy}{d\varkappa}$ oder $\frac{d\frac{dV}{d\varkappa}}{dx}=\frac{dy}{d\varkappa}$, also, wenn Null für $\varkappa$ gesetzt wird, $\frac{d\delta V}{dx}=\delta y$, folglich $\delta V=\int\delta y.dx$, woraus das Gesetz $\delta\int y\,dx=\int(\delta y)\,dx$ folgt.

VII. Wenn v nach $\varkappa$ variirt, so hat man

$$\delta\int\int v\,dx\,dy=\int\int(\delta v)\,dx\,dy$$

wo die Grenzen der Integrale auf beiden Seiten dieselben sein müssen. Hier können bei der ersten Integration nach y die Grenzen, zwischen denen das Integral genommen werden soll, noch von x abhängig sein, aber dann kann die Folge der beiden Integrationen nicht verändert werden.

VIII. Jetzt betrachten wir den Fall, wo die Grenzen des Integrals selbst noch $\varkappa$ enthalten. Ist $V = \int_a^b y\,dx$, wo y eine Function von x, und wird nun statt y eine solche Reihe $y_\varkappa$ gesetzt, deren (Variations-) Coefficienten $\delta y, \delta^2 y, \ldots$ wie immer, ganz beliebig, also selbst wieder Functionen von x sein können, werden aber zugleich auch statt b und a solche Reihen $b_\varkappa$ und $a_\varkappa$ gesetzt; so geht V ebenfalls in eine solche Reihe $V_\varkappa$ über, deren Variationsquotienten zufolge §. 75.

$$\delta V = \int_a^b (\delta y)\,dx + y_b \,.\, \delta b - y_a \,.\, \delta a;$$

$$\delta^2 V = \int_a^b (\delta^2 y)\,dx + \delta y_b \,.\, \delta b - \delta y_a \,.\, \delta a$$

$$+ \frac{dy_b}{dy}(\delta b)^2 - \frac{dy_a}{dy}(\delta a)^2 + y_b \,.\, \delta^2 b - y_a \,.\, \delta^2 a$$

sind, wo $y_b, y_a, \frac{dy_b}{dy}, \frac{dy_a}{dy}$ das bedeuten, was aus y und $\frac{dy}{dx}$ hervorgeht, wenn b, a statt x gesetzt werden, während δy_b, δy_a ebenfalls das bedeuten, was aus δy, im Falle solches eine Function von x ist, hervorgeht, wenn b, a statt x gesetzt werden.

Was die hier aufgeführten Beispiele betrifft, so gehen die Resultate alle aus dem im vorigen Paragraphen Gesagten hervor, nämlich, dass δV der Werth von $\frac{dV}{d\varkappa}$ ist für $\varkappa = 0$, und dass ebenso $\delta^2 V, \delta^3 V, \ldots$ die Werthe von $\frac{d^2 V}{d\varkappa^2}, \frac{d^3 V}{d\varkappa^3}, \ldots$ sind für $\varkappa = 0$. — Man beachte dabei, dass der Differentialquotient nach allem $\varkappa$, allemal gleich ist der Summe der Differentialquotienten, welche nach dem $\varkappa$ genommen sind, das in einzelnen beliebig genommenen Theilen vorkommt, wenn nur zuletzt nach allem $\varkappa$ wirklich differenzirt sich findet. Auch weiss man, dass es einerlei ist, ob man zuerst nach $\varkappa$ differenzirt, und dann noch nach x, y, ... differenzirt (integrirt), oder ob man dieselben Operationen in umgekehrter Ordnung vornimmt, wenn nur beim Integriren die Grenzen des Integrals nicht selbst noch veränderlich sind, nämlich nicht selbst $\varkappa$ enthalten. Auch ist es einerlei, ob man zuerst $\varkappa = 0$ setzt, und dann nach x, y, ... differenzirt (integrirt), oder ob man auch dies in umgekehrter Ordnung geschehen lässt; was namentlich daraus folgt, dass, während man

nach $x, y, \ldots$ differenzirt oder integrirt, der Werth $\varkappa$ beliebig ist, also auch gleich Null sein kann.

Die angeführten VIII Nummern enthalten die wichtigsten Einzelfälle der Variationsrechnung. Sollten die Fälle noch zusammengesetzter sein, so lassen sich die Variationsquotienten aus den hier entwickelten jedesmal leicht zusammensetzen. — Nämlich es sei V eine Function von beliebigen Veränderlichen $x, y, z, p, q, r, \ldots$, und diese entweder ganz unabhängig oder irgendwie von einander abhängig, so dass auch Differentiale und Integrale darunter sein können. V sei nun (auf eine beliebige Weise) durch $\varkappa$ variirt, d. h. eine oder einige oder alle der in ihr vorkommenden Veränderlichen $x, y, z, p, \ldots$ gehen in die Reihen $x_\varkappa, y_\varkappa, z_\varkappa, p_\varkappa, \ldots$ über, wodurch auch V in eine solche Reihe übergeht, und diese variirte Function wird durch $V_\varkappa$ vorgestellt. Dann werden die Variationen der abhängig Veränderlichen von denen der unabhängig Veränderlichen abhängen, und die Variationen der Function V durch die Variationen ihrer Veränderlichen (nach den angeführten Sätzen) sich ausdrücken lassen.

§. 127.

Unendlich kleine Variationen.

Bisher ist $\varkappa$ beliebig gross oder beliebig klein. In der Anwendung aber wird $\varkappa$ gewöhnlich unendlich klein gedacht. Dann hat man es mit unendlich kleinen Variationen oder Variationen im engern Sinne zu thun. Hier heissen die im entwickelten $v_\varkappa - v$ (mag nun v eine Function oder eine darin enthaltene Veränderliche sein) vorkommenden Glieder, die mit den verschiedenen Potenzen von $\varkappa$ behaftet sind, so dass jedes folgende gegen das vorhergehende selbst wieder unendlich klein ist, die (unendlich kleinen) Variationen von v, nämlich

$$\varkappa\delta v,\ \varkappa^2\delta^2 v,\ \ldots$$

nennt man die erste, zweite, ... Variation von v. Oft, namentlich in ältern Werken, bezeichnet man diese unendlich kleinen Aenderungen blos durch $\delta v, \delta^2 v, \ldots$ wofür wir aber hier, zur besseren Unterscheidung, $\partial v, \partial^2 v, \ldots$ schreiben, so dass wir

$$\varkappa\delta v = \partial v,\ \varkappa^2\delta^2 v = \partial^2 v,\ \ldots$$

setzen. Doch ist es bei den Anwendungen deutlicher und bequemer, die Variationen durch

$$\varkappa\delta v,\ \varkappa^2\delta^2 v,\ \ldots$$

auszudrücken, so dass δv, $\delta^2 v$, ... endliche Ausdrücke bleiben, während blos $\varkappa$ unendlich klein gedacht wird; diese endlichen $\delta v, \delta^2 v, ...$ kann man dann die Variationsquotienten nennen.

Denkt man sich die Gleichungen I bis VIII (des §. 126) bezüglich mit $\varkappa$, $\varkappa^2$, ... multiplicirt, so ergiebt sich, dass man sogleich in allen jenen Gleichungen überall ∂ statt δ schreiben kann (weil $\varkappa$ beim Differenzíren und Integriren nach den Veränderlichen constant ist, also jedesmal sogleich als Factor wieder herausgesetzt werden kann).

Wir heben besonders Folgendes hervor:

Aus IV und V (in §. 126) erhält man:

$$\partial d v = d \partial v.$$

Dies lässt sich auch auf folgende Art beweisen: Da $\partial(v + dv) = \partial v + \partial dv$ ist, so hat man $\partial dv = \partial(v + dv) - \partial v$, das ist $\partial dv = d\partial v$.

Aus dieser Gleichung folgt nun weiter:

$$\partial d^2 v = \partial d d v = d \partial d v = d d \partial v = d^2 \partial v,$$

u. s. w.

also allgemein:

$$\partial d^n v = d^n \partial v,$$

es mag v eine Function von einer oder von mehreren Variablen sein.

Aus VI (des §. 126) ergiebt sich:

$$\partial \int v = \int \partial v.$$

Dies lässt sich auch auf folgende Art beweisen: Setzt man $\int v = u$, so wird $du = v$, folglich auch $\partial du = \partial v$, oder $d\partial v = \partial v$; nimmt man nun beiderseits das Integral, so erhält man $\partial u = \int \partial v$, das ist $\partial \int v = \int \partial v$.

Auch lässt sich dieser Satz wieder auf höhere Integrale ausdehnen, z. B.

$$\partial \int \int v = \int \partial \int v = \int \int \partial v,$$

u. s. w.

Also, wenn die Zeichen ∂ und d, oder ∂ und $\int$ zusammen vorkommen, so ist die Ordnung dieser Zeichen gleichgültig.

Man kann hier auch durchgängig wieder δ statt ∂ setzen.

§. 128.

Anwendung der Variationsrechnung auf grösste und kleinste Werthe.

Die Variationsrechnung findet eine sehr wichtige Anwendung bei Bestimmung der Maxima und Minima. Früher in der Differential-

rechnung wurden Maxima und Minima der Werthe gegebener Functionen betrachtet. Jetzt aber wird die Relation selbst gesucht, welche zwischen Grössen stattfinden muss, damit ein aus diesen Grössen zusammengesetzter Ausdruck, unter allen möglichen Relationen, welche zwischen jenen Grössen stattfinden können, ein Maximum oder Minimum werde, d. h. grösser oder kleiner als die Nachbarwerthe dieses Ausdrucks, welche entstehen, indem man jene Relation allmählig oder stetig sich ändern lässt.

Wird x unendlich klein, positiv und negativ, gedacht, so stellt V_x, das ist die Reihe

$$V + \delta V \frac{x}{1} + \delta^2 V \frac{x^2}{1.2} + \delta^3 V \frac{x^3}{1.2.3} + \dots$$

die dem V nächstanliegenden Functionen (die nächsten Nachbarfunctionen von V) vor. V heisst ein Maximum (Grösstes) oder ein Minimum (Kleinstes) in Bezug auf V_x, jenachdem V grösser oder kleiner als V_x, d. h. jenachdem die geringste Variation von V dasselbe kleiner oder grösser macht. — Man sucht nun die Bedingungen auf, unter welchen V ein Grösstes oder Kleinstes ist, und findet auf ähnlichem Wege, wie bei den grössten und kleinsten Werthen in der Differentialrechnung, Folgendes:

Es ist V ein Minimum in Bezug auf die beiden, zu positivem und negativem aber unendlich kleinem x gehörigen, Werthe V_x, wenn die Differenz

$$V_x - V = \delta V \frac{x}{1} + \delta^2 V \frac{x^2}{1.2} + \delta^3 V \frac{x^3}{1.2.3} + \dots$$

mit x selbst das (+ oder —) Zeichen nicht wechselt, sondern jedesmal positiv ist; dagegen ist V ein Maximum, wenn dieselbe Differenz oder Reihe ebenfalls mit x selbst das (+ oder —) Zeichen nicht wechselt, aber jedesmal negativ ist. Weil jedoch x unendlich klein gedacht wird, so ändert jede nach x fortlaufende Reihe ihr (+ oder —) Zeichen, wenn das erste Glied derselben, welches nicht Null ist, dieses Zeichen ändert. Also muss

$$\delta V = 0$$

sein, wenn V ein Maximum oder Minimum soll werden können, in Bezug auf die beiden Werthe V_x; weil, wenn δV nicht Null ist, die Reihe mit dem Gliede $x\delta V$, also mit x zugleich ihr (+ oder —) Zeichen ändern würde. — Die Gleichung $\delta V = 0$ kann oft in zwei und mehr Gleichungen zerfallen, zufolge der Natur der einzelnen

Aufgabe. Hat man aber aus dieser Gleichung $\delta V = 0$ alle Werthe der unabhängigen Veränderlichen gefunden, welche durch dieselbe bestimmt werden können, so substituire man diese in $\delta^2 V$. Wird dann $\delta^2 V$ negativ, so ist V gegen V_x ein Maximum; wird aber $\delta^2 V$ positiv, so ist V gegen V_x ein Minimum. Bei den gewöhnlichen Anwendungen braucht man in die complicirte Analyse von $\delta^2 V$ nicht einzugehen, weil sich schon aus der speciellen Natur der Aufgabe erkennen lässt, ob ein Grösstes oder ein Kleinstes stattfinden muss.

Sollten dieselben Werthe, welche $\delta V = 0$ machen, auch $\delta^2 V$ zu Null machen, so müsste man die Untersuchung bis zu $\delta^3 V$ fortführen, übrigens jedesmal die vorhin erwähnte Entscheidung herbeizuführen trachten.

Gewöhnlich ist V bei der Anwendung ein Integralausdruck, z. B. in den Aufgaben, wo die kürzeste Linie zwischen bestimmten Grenzen, die grösste durch eine ebene Curve gegebener Länge begrenzte Fläche, die Curve des schnellsten Falles, der Körper vom geringsten Widerstande, u. s. w. gesucht wird.

Das Schwierigste bei unserer Aufgabe über Maxima und Minima ist gewöhnlich die weitere Behandlung der Gleichung $\delta V = 0$. Dabei ist das Hauptgeschäft, die Gleichung $\delta V = 0$ gehörig in die durch sie bedingten einzelnen Gleichungen zu zerfällen, indem man, wegen herbeigeführter Unabhängigkeit (Willkürlichkeit) der Factoren in den Gliedern, die Coefficienten der Glieder einzeln gleich Null setzt. — Zu diesem Zwecke muss man, wenn V ein Integralausdruck ist, um die Behandlung der Gleichung $\delta V = 0$ gehörig durchführen zu können, nothwendig vorher δV so umformen, dass keine Differentiale der Variationen mehr unter dem Integralzeichen vorkommen. Diese Umformung ist immer dadurch möglich, dass man die einzelnen Glieder unter dem Integralzeichen, welche noch mit Differentialen der Variationen ($d\delta$) behaftet sind, wiederholt theilweise integrirt, nach der Formel $\int u dv = uv - \int v du$, so lange bis alle $d\delta$ vom Integralzeichen befreit erscheinen, und nur noch δ allein unter dem Integralzeichen vorkommen. Nur erst wenn δV diese Form hat, lässt sich die Gleichung $\delta V = 0$ sogleich (nach §. 118) weiter zerlegen, so dass man alle die einzelnen Gleichungen erhält, welche in der Gleichung $\delta V = 0$ stecken.

§. 129.

Allgemeinere Anwendung der Variationsrechnung.

Der Variations-Calcul ist übrigens nicht auf die Theorie der Maxima und Minima beschränkt, sondern derselbe findet überhaupt eine sehr wichtige Anwendung, wo es vorkommt, dass eine Grösse zweierlei Arten von Aenderungen erfährt, die nicht nur von einander unabhängig sind, sondern auch wesentlich verschiedene Ursachen haben. In einem solchen Falle lässt sich der Begriff der Variation einführen, was den wesentlichen Vortheil gewährt, im Calcul selbst die heterogenen Veränderungen durch d und δ von einander zu unterscheiden. Nämlich wenn Grössen, die untereinander zusammenhängen, Aenderungen erleiden, ohne dass dabei ihr Zusammenhang sich ändert, indem sie an dieselbe Gleichung gebunden bleiben, so entstehen Differentiale; aber wenn die Grössen sich dadurch ändern, dass ihr gegenseitiger Zusammenhang ein anderer wird, so entstehen Variationen.

Erstes Beispiel. Wir betrachten ein System von Puncten, welche durch ihre Coordinaten bestimmt sind. Geht man von einem Puncte zu einem nächsten über, so ändern sich die Coordinaten um ihre Differentiale. Denkt man sich aber das System in Bewegung (wodurch die Form des Systems geändert wird), so ändern sich die Coordinaten um ihre Variationen. — So kommt es, dass die Variationsrechnung höchst wichtige Anwendung in der analytischen Mechanik findet.

Zweites Beispiel. Auch in der mathematischen Wärmelehre könnte man (obgleich es noch nicht geschehen) einen ähnlichen sehr nützlichen Gebrauch von der Variationsrechnung machen. Nämlich man hat hier zweierlei Veränderungen der Temperatur an einem Körper zu unterscheiden, wovon die eine Art eintritt, wenn man von einem Puncte des Körpers zu einem andern übergeht, und die andere Art, wenn man denselben Punct zu verschiedenen Zeiten betrachtet.

Ueberblick über das System und die Anwendungen der Analysis.

---

§. 130.

Vollendung des Fortschrittes der Abstraction.

Blicken wir auf den durchlaufenen Weg zurück, so zeigt sich, dass die auf einander folgenden Haupttheile der Zahlenlehre durch stufenweises Verallgemeinern der Begriffe hervorgegangen sind. Bereits in den Elementen zeigt sich der Verallgemeinerungs-Process, indem der Begriff der Zahl und damit auch die Begriffe der Rechnungsarten allmählig allgemeiner werden; nämlich in der Arithmetik, welche mit absoluten Zahlen rechnet, wird der Begriff der Zahl so erweitert, dass er ausser den ganzen auch die gebrochenen und irrationalen Zahlen umfasst, und in der Algebra, welche auch die Vorzeichen der Zahlen aufnimmt, wird der Begriff weiter auf negative und imaginäre Zahlen ausgedehnt, wobei zugleich die arithmetischen Operationen sich zu algebraischen erweitern. Schreitet man fort zur Analysis, so werden die Zahlenwerthe in ihrer Veränderung durch die Function, und die Functionen selbst in ihrer Veränderung durch die Variationsrechnung begriffen. So erreicht die Variationsrechnung die höchste Abstraction, zu welcher die Mathematik im Verlaufe ihrer stufenweisen Ausbildung bis jetzt sich erhoben hat.

Eine noch wesentlich höhere Stufe des Verallgemeinerns ist wohl nicht zu erwarten, denn man müsste sonst über Function hinausgehen können, was aber schon der allgemeinste Begriff der Mathematik ist.

§. 131.

Grosse Allgemeinheit der Formeln mittelst der höheren Analysis.

Der Charakter der höheren Analysis spricht sich in der Darstellung allgemeinster Gesetze aus. Nämlich ein grosser Nutzen der

Infinitesimalrechnung besteht darin, dass die durch Anwendung dieser Rechnung auf Geometrie, Mechanik u. s. w. gebildeten Differential-Formeln von grosser Allgemeinheit sind (wovon der letzte Grund darin liegt, dass alle Functionen in ihren kleinsten Veränderungen auf die elementaren sich zurückziehen). Dadurch ist der Mathematiker in den Stand gesetzt, ein allgemeines Gesetz für unzählig mannigfaltige Fälle analytisch darzustellen. In den wechselnden Erscheinungen der Geometrie oder Mechanik lässt sich das Gemeinsame auffinden, indem man vermittelst der Differentialausdrücke zu Gesetzen sich erhebt. Auf solche Weise ist es möglich geworden, das ganze System einer Wissenschaft von unermesslicher Ausbreitung, z. B. die Geometrie oder die Mechanik, zu einer kleinen Anzahl von analytischen Formeln zu condensiren, aus welchen die Lösung aller speciellen Probleme nach bestimmten Regeln sich ableiten lässt.

Dem Gebrauche der höheren Analysis verdankt man die hohe Vervollkommnung, welche die allgemeinen Theorien der Geometrie und Mechanik endlich erlangt haben.

§. 132.

Die Mechanik als Beispiel.

Wir wollen hier kurz andeuten, bis zu welchem Grade der Analytiker vermag, zu immer höheren Gesetzen fortzuschreiten, indem wir die analytische Mechanik als Beispiel wählen. — Schon früher (§. 60) wurde das Gauss'sche Princip erwähnt, welches sowohl Statik als Mechanik umfasst. Doch lässt sich das allgemeine Princip der Statik auch in anderer Form ausdrücken, die für den Calcul noch bequemer ist, wie folgt:

Es wird ein System von Puncten betrachtet, auf welche die Kräfte P_1, P_2, P_3, ... wirken. Man gebe dem Systeme irgend eine unendlich kleine Bewegung, welche mit den (durch Gleichungen ausdrückbaren) Bedingungen des Systemes verträglich ist, so dass die Angriffspuncte der Kräfte unendlich kleine Wege machen. Nun projicir man diese Wege auf die Richtungen der zugehörigen Kräfte, und betrachte diese Projectionen δp_1, δp_2, δp_3, ... als positiv oder als negativ, jenachdem sie in die Richtung der betreffenden Kraft selbst oder in die gerad entgegengesetzte fallen. Dann ist

$$P_1\,\delta p_1 + P_2\,\delta p_2 + P_3\,\delta p_3 + \ldots = 0$$

oder kurz geschrieben

$$\Sigma P\,\delta p = 0$$

die nothwendige und ausreichende Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht eines Systemes (mag dies fest oder flüssig sein). Aus dieser einzigen Gleichung, welche das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten heisst, lässt sich die gesammte Statik (oder Lehre vom Gleichgewichte) auf analytischem Wege entwickeln. Ferner lässt sich die Dynamik (oder Lehre von der Bewegung) auf die Statik zurückführen mittelst des d'Alembert'schen Princips, welches aussagt, dass in einem in Bewegung begriffenen Systeme von Puncten die den Puncten mitgetheilten und die resultirenden Kräfte, wenn man letztere in entgegengesetzter Richtung nimmt, einander im Gleichgewichte halten. Demnach kann man die gesammte Mechanik (d. i. Statik und Dynamik) fester sowohl als flüssiger Körper aus jener einzigen Formel ableiten. Dies hat bekanntlich Lagrange in seiner Mécanique analytique gethan, welche eins der vorzüglichsten Werke ist, die je im Gebiete der Mathematik erschienen sind.

Der Techniker, welcher Mechanik ohne Hülfe der höheren Analysis, blos auf elementarem Wege, studiren wollte, würde eine Menge vereinzelter Sätze für die speciellen Fälle durchzugehen haben, aber doch nicht die höheren Gesetze durchschauen, welche allen ähnlichen Erscheinungen gemeinschaftlich zu Grunde liegen. Das Letztere leistet allein der Beistand der höheren Analysis, weil sie den Formeln eine so grosse Allgemeinheit verleiht. Durch ihre Hülfe wird der Techniker einen allgemeinen Gesichtskreis gewinnen, und einen sicheren Wegweiser entdecken, welcher von den höchsten und einfachsten Principien der Mechanik zu ihren unendlich mannigfaltigen Phänomenen führt, so dass er für jeden neuen Fall die Regel selber zu finden im Stande ist. — Dazu kommt noch, dass man in der Mechanik die Entbehrung der Differential- und Integralrechnung oft nur auf die weitschweifigste und ermüdendste Weise durch unendliche Reihen ersetzen kann.

§. 133.

Ein Blick auf die Welt der angewandten Zahlengesetze überhaupt.

Bei der Anwendung der Mathematik hat der Mensch das seinem Geiste nothwendige Streben, Qualität auf Quantität zu reduciren. So erscheint uns Geometrie und Mechanik als die bildliche Darlegung gewisser Beziehungen aus dem grossen erhabenen Ganzen der Analysis. Auch in der Physik suchen wir mittelst der Analysis die mannigfaltigen qualitativen Unterschiede als blos quantitative Verhältnisse so weniger Urqualitäten als möglich zu erkennen.

§. 134.

Guter Rath.

Zum Schlusse möchten wir dem Studirenden, damit er nicht in zu viel theoretisches Grübeln verfalle, die Worte eines der grössten Mathematiker, des unsterblichen Verfassers der Mécanique analytique, einprägen: „C'est aux applications, qu'il convient surtout de donner son temps et sa peine."



FS 9/- 5,89-



